

Jaime Bravo Puebla

**EL DESARROLLO DE LA
HABILIDAD MATEMÁTICA
NIVEL 1**



Universidad Rafael Urdaneta

FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA

*EL DESARROLLO DE LA
HABILIDAD MATEMÁTICA*

NIVEL 1

Jaime Bravo Puebla

***EL DESARROLLO DE LA
HABILIDAD MATEMÁTICA
NIVEL 1***



Universidad Rafael Urdaneta

FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA

Universidad Rafael Urdaneta

Autoridades Rectorales

Dr. Jesús Esparza Bracho, Rector

Ing. Maulio Rodríguez, Vicerrector Académico

Ing. Salvador Conde, Secretario

Lic. Nancy Villarroel M.L.S. Directora de Biblioteca

Mayo 2011

2011© Universidad Rafael Urdaneta

Portada: Luz Elena Hernández

Diseño y maquetación: Lcda. Liseth A. Villasmil Faría

Universidad Rafael Urdaneta, Fondo Editorial Biblioteca

Vereda del Lago, Maracaibo, Venezuela.

ISBN: 978-980-7131-08-7

Depósito legal: lfi2382011510514



Universidad Rafael Urdaneta
FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA

El Autor:

Jaime Ricardo Bravo Puebla
Ph. D. en Matemáticas.
Graduado en la
University of California,
Berkeley, USA.
Profesor Jubilado de la
Universidad del Zulia,
Profesor de la Universidad
Rafael Urdaneta
Maracaibo, Venezuela.

jaimebravo45@hotmail.com

Dedicatoria

Este libro está dedicado a todos los Profesores y a todas las Profesoras de la Educación Primaria y de la Educación Secundaria, como un agradecimiento hacia quienes, con tanto esfuerzo y dedicación cotidiana, nos han enseñado nuestros conocimientos iniciales.

Prólogo

Este es el primero de una serie de tres textos que ayudan a desarrollar la habilidad matemática de los estudiantes interesados, hasta un nivel preuniversitario.

Este nivel 1 está escrito para estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado o egresados de la enseñanza primaria, y está basado en ejercicios que ayudan a desarrollar la habilidad matemática, usando solo los conocimientos de los tres últimos años de la educación primaria (cuarto, quinto y sexto grado).

Este nivel 1 puede también ser usado, como un texto inicial, por estudiantes de la enseñanza secundaria que tengan la intención de desarrollar su habilidad matemática con miras hacia las pruebas de ingreso a la Universidad.

Este texto consta de 10 Lecciones con respectivos exámenes y contiene además un examen final. Cada Lección comienza con la solución de 5 problemas. Las soluciones y comentarios hechos en cada uno de estos problemas, son lo suficientemente explícitos (y usan tanto el lenguaje técnico como su traducción al lenguaje común), de manera tal que cada estudiante pueda recordar los conceptos envueltos con facilidad. Después de cada problema resuelto, se exhiben suficientes problemas, con respuestas, similares al problema planteado, que el estudiante debe resolver con el fin de ir desarrollando su habilidad matemática. Solo al completar todo este proceso, es que el estudiante debe proceder a resolver el examen correspondiente a la cada Lección.

Las respuestas de los problemas de cada examen están al final del texto, y un conjunto de indicaciones para su solución aparecen al final de la Lección correspondiente.

No existe, hasta ahora, otra forma de desarrollar la habilidad matemática, que resolver problemas adecuados en forma constante y sistemáticamente. Espero que este texto sea de gran utilidad para el logro de este fin.

Índice general

El Autor	5
Dedicatoria	6
Prólogo	7
Lección 1	
5 problemas resueltos.....	11
Examen 1.....	21
Hoja de respuestas.....	24
Indicaciones para resolver el examen 1.....	25
Lección 2	
5 problemas resueltos.....	26
Examen 2.....	35
Hoja de respuestas.....	38
Indicaciones para resolver el examen 2.....	39
Lección 3	
5 problemas resueltos.....	40
Examen 3.....	50
Hoja de respuestas.....	53
Indicaciones para resolver el examen 3.....	55
Lección 4	
5 problemas resueltos.....	56

Examen 4.....	68
Hoja de respuestas.....	71
Indicaciones para resolver el examen 4.....	72
Lección 5	
5 problemas resueltos.....	73
Examen 5.....	83
Hoja de respuestas.....	86
Indicaciones para resolver el examen 5.....	87
Lección 6	
5 problemas resueltos.....	88
Examen 6.....	97
Hoja de respuestas.....	100
Indicaciones para resolver el examen 6.....	101
Lección 7	
5 problemas resueltos.....	102
Examen 7.....	112
Hoja de respuestas.....	115
Indicaciones para resolver el examen 7.....	116
Lección 8	
5 problemas resueltos.....	117
Examen 8.....	130
Hoja de respuestas.....	133
Indicaciones para resolver el examen 8.....	134
Lección 9	
5 problemas resueltos.....	135

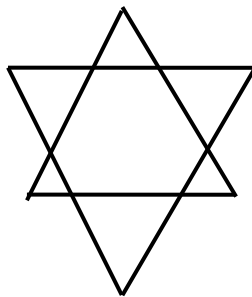
Examen 9.....	151
Hoja de respuestas.....	154
Indicaciones para resolver el examen 9.....	155
Lección 10	
5 problemas resueltos.....	156
Examen 10.....	172
Hoja de respuestas.....	175
Indicaciones para resolver el examen 10.....	176
Índice alfabético.....	177
Puzzle: El Cuadrado.....	181

LECCIÓN 1

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la figura?

- A. 6
- B. 8
- C. 2
- D. 4
- E. 12



Solución. La figura está compuesta por dos triángulos superpuestos, uno de ellos está boca abajo. Es el que tiene la forma:



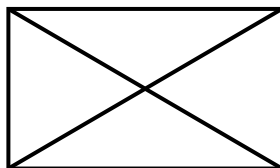
. El otro está boca arriba. Es el que tiene la forma:



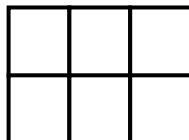
Así, en nuestra cuenta del número de triángulos, ya llevamos dos. Además, hay seis triángulos pequeños que son los que dan forma de estrella a la figura. Una inspección adicional indica que no hay otros triángulos. Luego, en total, se pueden contar, $2 + 6 = 8$ triángulos. En consecuencia, la respuesta correcta es B.

Comentario. El error más común en este problema es no observar los dos triángulos que hemos contado primero. En este caso, tú solo contarás los 6 triángulos pequeños y marcarás la respuesta A como tu solución, la cuál como hemos visto, es incorrecta.

Para ejercitar un poco más este tipo de ejercicio, cuenta cuántos triángulos hay en la siguiente figura:



Cuidado que hay más de 4 triángulos. Te deben resultar 8 triángulos. Ahora, cuenta el número de cuadrados que se observan en la siguiente figura (recuerda que los cuadrados tienen sus 4 lados iguales y dos lados seguidos son perpendiculares entre sí)



De nuevo, hay 8 cuadrados (observa que la figura completa es un rectángulo que no es un cuadrado; pero, hay dos cuadrados “medios ocultos” que tú debes encontrar).

Problema 2. Javier gastó Bs. 320 en la compra de un chocolate y le quedaron Bs. 1080. ¿Cuánto dinero tenía Javier?

- A. Bs. 1300
- D. Bs. 860
- B. Bs. 760
- E. Bs. 1400
- C. Bs. 660

Solución. Si Javier gastó Bs. 320 y le quedaron Bs. 1080, entonces Javier tenía Bs. 320 más que los Bs. 1080 que le quedaron. Es decir, Javier tenía:

$$\begin{array}{r}
 1080 \\
 + \underline{320} \\
 \hline
 \text{Bs. } 1400.
 \end{array}$$

Luego, la respuesta correcta es E.

Comentario. El error más típico al resolver este problema, es restar Bs. 320 de los Bs. 1080. Es decir, hacer la resta:

$$\text{Bs. } 1080 - \text{Bs. } 320 = \text{Bs. } 760.$$

Uno tiene que ser cuidadoso al leer el enunciado del problema y observar que:

“si después de gastar Bs. 320, a Javier le quedan Bs. 1080, entonces necesariamente Javier tenía más dinero que Bs. 1080 ”.

Para practicar más este tipo de ejercicios, resuelve los siguientes problemas:

- (1) Felipe tenía Bs. 5000 y se compró un refresco de Bs. 1800 y una galleta de Bs. 700. ¿Cuánto dinero le queda todavía?
- (2) Andrea tenía Bs. 2800 y se compró dos chocolates de Bs. 600 cada uno. ¿Cuánto dinero le queda todavía?
- (3) Reinaldo compró un helado de Bs. 7000 y pagó con un billete de Bs. 10000. Si en el vuelto le dieron Bs. 1000 de más, ¿cuánto le dieron de vuelto a Reinaldo?
- (4) Camila le pagó los Bs. 480 que le debía a Paulina y le quedaron Bs. 720. ¿Cuánto dinero tenía Camila?
- (5) Nataly compró un refresco en Bs. 2500 y una caja de galletas de Bs. 1800 y le quedaron Bs. 2380. ¿Cuánto dinero tenía?

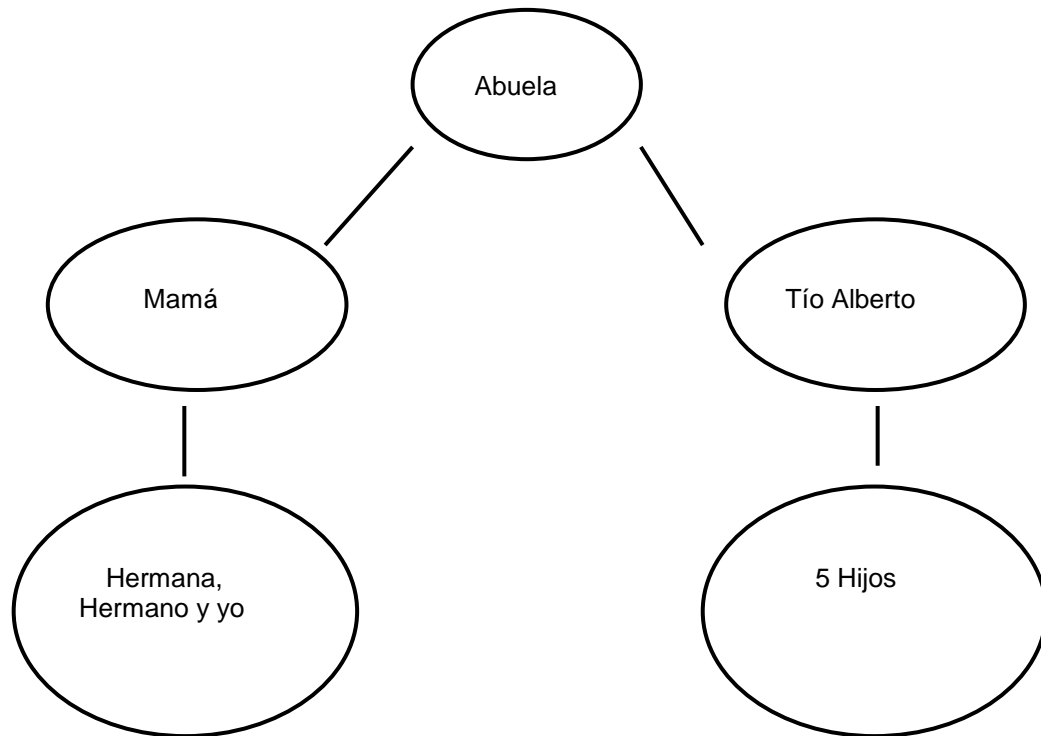
Las respuestas son:

- (1) Bs. 2500
- (2) Bs. 1600
- (3) Bs. 4000
- (4) Bs. 1200
- (5) Bs. 6680

Problema 3. Mi abuela tuvo dos hijos: mi mamá y mi tío Alberto. Mi tío Alberto tiene 5 hijos y yo tengo un hermano y una hermana. ¿Cuántos nietos (tanto hembras como varones) tiene mi abuela?

- | | |
|---------------|-------------|
| A. menos de 5 | D. 7 |
| B. 5 | E. más de 7 |
| C. 6 | |

Solución. Tratemus de hacer un dibujo que aclare la situación:



Luego, el número total de nietos que tiene mi abuela es 8. Por lo tanto, la respuesta correcta es E.

Resuelve ahora los siguientes problemas similares, tratando de hacer un dibujo, como lo hicimos recién.

- (1) Roxana tiene dos cajas grandes. Dentro de cada caja grande tiene dos cajas medianas y dentro de cada caja mediana tiene una caja pequeña. ¿Cuántas cajas tiene Roxana en total?
- (2) Para entregarles a los invitados del cumpleaños de su hija, una mamá hace bolsas, cada una de las cuales contiene 4 golosinas: un chicle, una chupeta, un pepito y un chocolate. En

total se hicieron 12 bolsas y sobraron 4 chicles, 2 chupetas y 5 pepitos. ¿Cuántas golosinas había en total?

- (3) A una fiesta asistieron 20 personas. En un momento dado bailaban algunas parejas (hombre y mujer) y en ese mismo momento se observó que 2 mujeres y 4 hombres eran los únicos que no estaban bailando. ¿Cuántas mujeres asistieron a la fiesta?

Las respuestas son:

- (1) 10 cajas
(2) 59 golosinas en total
(3) 9 mujeres

Problema 4. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado es 9?

- A. 3
B. 6
C. 9
D. 27
E. 81

Solución. Recordemos primero lo que significa el cuadrado de un número. Por ejemplo, 6^2 se lee “6 al cuadrado”, y significa que 6 se multiplica por sí mismo dos factores. Es decir, $6^2 = 6 \times 6 = 36$. A propósito, no está bien dicho que en la multiplicación 6×6 , el 6 se multiplica dos veces. En 6×6 hay una sola multiplicación, donde eso sí, 6 se repite como factor dos veces.

Observemos, antes de continuar, que 6^2 **no** significa $6 \times 2 = 12$. Este es un error muy común que debemos evitar.

Otro ejemplo es: 4^2 se lee “4 al cuadrado”, y significa 4×4 . Es decir, $4^2 = 4 \times 4 = 16$ (y no es lo mismo que $4 \times 2 = 8$).

Volviendo ahora al problema planteado, debemos alertar que no es lo mismo preguntar por el cuadrado de 9, que preguntar por el número cuyo cuadrado es 9. Por ejemplo, no es lo mismo preguntar: ¿quién liberó a Venezuela?, cuya respuesta es Simón Bolívar, que

preguntar: ¿de quién se liberó Venezuela?, cuya respuesta es de España.

Aquí, $3^2 = 3 \times 3 = 9$. Luego, el número cuyo cuadrado es 9, es el número 3. Por lo tanto, la respuesta correcta es A.

Para trabajar un poco más con este tipo de problemas, resuelve los siguientes:

- (1) ¿Cuál es el número cuya tercera parte es 6?
- (2) El doble de un número es 8. ¿Cuál es el número?
- (3) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado es 4?
- (4) La cuarta parte de un número es 4. ¿Cuál es el número?

Las respuestas a estos problemas son:

- (1) 18 (Cuidado: aquí no se pide la tercera parte de 6).
- (2) 4 (Cuidado: aquí no se pide el doble de 8).
- (3) 2 (Cuidado: aquí no se pide el cuadrado de 4).
- (4) 16 (Cuidado: aquí no se pide la cuarta parte de 4).

Problema 5. ¿Qué fracción del rectángulo es la parte sombreada?

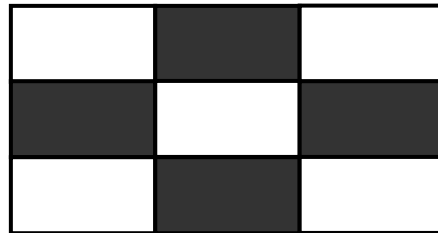
A. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{4}{5}$

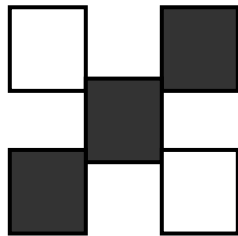


Solución. El rectángulo está dividido en 9 partes iguales entre sí. Cada una de estas partes representa $\frac{1}{9}$ del total. Como se han

sombreado 4 de estas partes, entonces la parte sombreada corresponde a 4 veces $\frac{1}{9}$. Es decir, corresponde a $\frac{4}{9}$ del total. Así, la respuesta correcta es D.

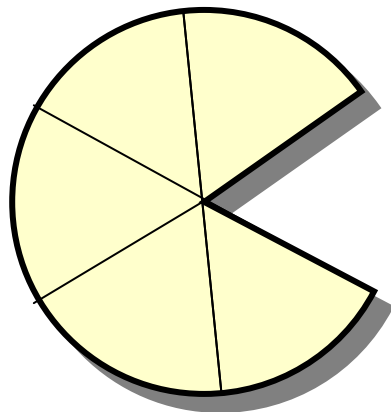
Comentario. Debemos practicar más este tipo de problemas. Por ejemplo, resolvamos los siguientes dos ejemplos:

1. ¿Qué fracción de la figura total es la parte sombreada?



La figura total se compone de 5 cuadrados iguales entre sí. Cada uno de estos 5 cuadrados representa $\frac{1}{5}$ de la figura total. Como tres de ellos están sombreados, entonces la parte sombreada representa los $\frac{3}{5}$ de la figura total.

2. ¿Qué fracción del círculo es la parte que falta?



Recordemos primero que el círculo es la superficie encerrada por la correspondiente circunferencia.

El círculo es una superficie y la circunferencia es la línea limítrofe que la encierra.

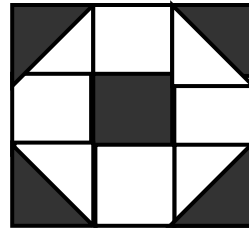
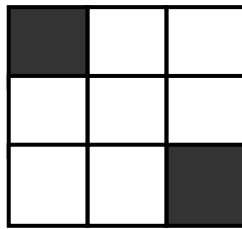
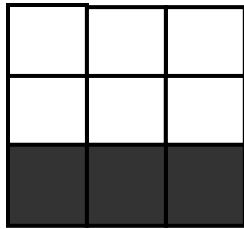
Observemos, ahora, que el círculo dado se ha dividido en 6 partes iguales entre sí. Cada una de estas partes representa $\frac{1}{6}$ del total.

Una sola de estas partes está faltante, entonces la parte que falta representa $\frac{1}{6}$ del círculo.

Ahora tú, resuelve los siguientes problemas:

En la figura de abajo hay tres cuadrados grandes: el de la izquierda, el del centro y el de la derecha.

1. ¿Qué parte del cuadrado de la izquierda ha sido sombreada?



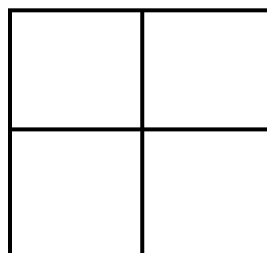
2. ¿Qué parte del cuadrado del centro ha sido sombreada?
3. ¿Qué parte del cuadrado de la derecha ha sido sombreada?

EXAMEN 1

Resuelve los siguientes 8 problemas marcando con una cruz, en cada problema, tu respuesta: A, B, C, D ó E, en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. ¿Cuántos cuadrados es posible contar en la figura adjunta?

- A. 1
- B. 4
- C. 5
- D. 8
- E. Más de 8.



2. Si a un número le sumo 8, resulta 13. ¿Cuál es el número?

- A. 21
- B. 5
- C. 8
- D. 13
- E. 4

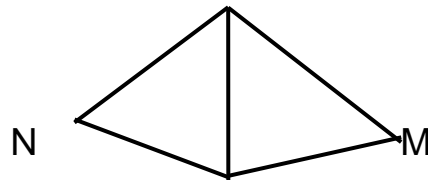
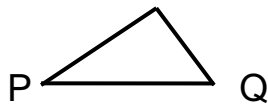
3. Si tuviera 25 bolitas más de las que tengo, tendría 78 bolitas. ¿Cuántas bolitas tengo?

- A. 78
- B. 103
- C. 53
- D. 25
- E. 50

4. ¿Cuál es el número cuya mitad es el doble de 3?

- A. 3
- B. 6
- C. 8
- D. 9
- E. 12

5. En la figura de la izquierda, se observa que hay solo 2 caminos posibles para ir desde el punto P hasta el punto Q (sin retroceder). ¿Cuántos caminos posibles (sin retroceder) hay para ir desde el punto M hasta el punto N en la figura de la derecha?



- A. 3
- B. 4
- C. 6

- D. 8
- E. 2

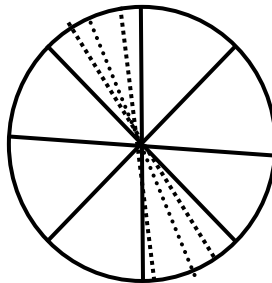
6. A una fiesta asistieron 100 personas. Solo 14 mujeres y 6 hombres eran solteros. Todos los demás eran parejas de casados. ¿Cuántos hombres asistieron a la fiesta?

- A. 23
- B. 30
- C. 40

- D. 46
- E. 54

7. ¿Qué fracción del círculo es la parte sombreada?

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{3}{4}$
- C. $\frac{2}{6}$
- D. $\frac{2}{8}$
- E. $\frac{6}{8}$



8. Un bus inicia su recorrido con 18 pasajeros. Antes de llegar a su destino final realiza 4 paradas intermedias. En cada una de estas suben 6 pasajeros y bajan 8. ¿Con cuántos pasajeros termina su recorrido?

- A. 10
- B. 8
- C. 12

- D. 4
- E. 72

HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 1

1. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 1 de esta Lección.
2. Antes de resolver el problema, observa que el número debe ser menor que 13 ya que al sumarle 8, resulta 13.
3. Antes de resolver el problema, observa que tengo menos de 78 bolitas, ya que al tener 25 bolitas más, tendré 78 bolitas.
4. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 4 de esta Lección. Observa que el doble de 3 es 6. Luego, la pregunta es: ¿cuál es el número cuya mitad es 6?
5. Los dos caminos que hay (sin retroceder) para ir desde el punto P hasta el punto Q en la figura de la izquierda son:



6. Este problema es similar al problema resuelto número 3 de esta Lección. Debes responder primero: ¿cuántas parejas de casados asistieron a la fiesta? Y luego, debes considerar que la mitad de este número de parejas son hombres.
7. Este problema es similar al problema resuelto número 5 de esta Lección.
8. Este problema es similar al problema resuelto número 3 de esta Lección. Debes hacer un dibujo primero. Es decir, un dibujo de la parada inicial, de las 4 paradas intermedias y de la parada final.

LECCIÓN 2

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. Si la cuarta parte de 28 se multiplica por 8, se obtiene:

- A. 7
- B. 48
- C. 64
- D. 224
- E. Ninguna de las anteriores.

Solución. La cuarta parte de 28 es $28:4$. Pero, 28 entre 4 es 7. Luego, la cuarta parte de 28 es 7.

Si ahora 7 se multiplica por 8, se obtiene $7 \times 8 = 56$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es E.

Comentario. Este problema, en verdad, no es difícil. La única novedad es que en la respuesta E aparece la frase: “Ninguna de las anteriores”.

En este caso, se marca la respuesta E como la respuesta correcta, porque ninguna de las respuestas A, B, C, D anteriores, contiene la respuesta correcta.

Pero, ¡Cuidado! En el futuro, algunas veces, aparecerá dentro de las respuestas de un problema que la alternativa E es “Ninguna de las anteriores” sin que E sea la respuesta correcta.

Para practicar más, resuelve ahora los siguientes problemas similares:

- (1) ¿Qué número resulta si al doble de 14 lo multiplicamos por 2?
- (2) ¿Qué número resulta si al doble de 18 lo dividimos por 9?
- (3) ¿Qué número resulta si a la mitad de 36 la dividimos por 3?

- (4) ¿Qué número resulta si a la cuarta parte de 8 la multiplicamos por 8?
- (5) ¿Qué número resulta si al cuadrado de 4 lo dividimos por 2?
- (6) ¿Cuál es el cuadrado de la mitad de 6?

Las respuestas a estos problemas son:

- (1) 56
- (2) 4
- (3) 6
- (4) 16
- (5) 8 (el cuadrado de 4 es $4^2 = 4 \times 4 = 16$)
- (6) 9 (la mitad de 6 es 3, luego, la pregunta es: ¿cuál es el cuadrado de 3?)

Problema 2. El número 10100101 se lee:

- A. Un millón cien mil uno.
- B. Diez millones cien mil uno.
- C. Ciento un mil ciento uno.
- D. Diez millones cien mil ciento uno.
- E. Un millón cien mil ciento uno.

Solución. Para leer el número 10100101 correctamente, primero se debe marcar por medio de un punto cada grupo de tres cifras, comenzando desde la derecha del número hacia la izquierda.

Es decir, el número dado se debe escribir como 10.100.101.

Ahora se ve más claro que el número es 10 millones 100 mil 101. Es decir, diez millones cien mil ciento uno.

Luego, la respuesta correcta es D.

Comentario. La experiencia indica que este problema trae cierta confusión a varios estudiantes, por lo cual conviene practicar un poco más.

Por ejemplo, lee cada uno de los siguientes cuatro números, usando el método explicado en la solución anterior:

- (1) 100101
- (2) 1011001
- (3) 10101101
- (4) 110011101.

Las respuestas a estos cuatro ejercicios son:

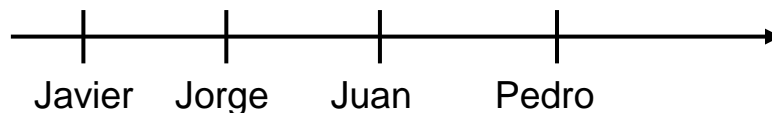
- (1) El número se escribe 100.101 y se lee cien mil ciento uno.
- (2) El número se escribe 1.011.001 y se lee un millón once mil uno.
- (3) El número se escribe 10.101.101 y se lee diez millones ciento un mil ciento uno.
- (4) El número se escribe 110.011.101 y se lee ciento diez millones once mil ciento uno.

Problema 3. Jorge es el padre de Javier y Juan es el hijo de Pedro. Si Juan no es menor (en edad) que Jorge, ¿cuál es el menor?

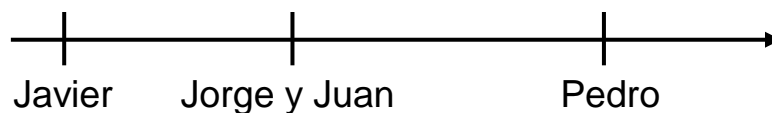
- A. Jorge
- B. Javier
- C. Pedro
- D. Juan
- E. Faltan datos para determinarlo.

Solución. Como Juan no es menor que Jorge, entonces Juan tiene la misma edad que Jorge o bien Juan es mayor que Jorge. Por otro lado, Jorge es mayor que Javier (por ser el padre de este) y Pedro es mayor que Juan (ya que Pedro es el padre de Juan).

Es bueno hacer un dibujo en una sola línea, poniendo la información obtenida y escribiendo desde la izquierda hacia la derecha la lista de estas personas de menor a mayor:



Pero, si Juan y Jorge tienen la misma edad, el dibujo será:



En todo caso, obtenemos que Javier es el menor.
Luego, la respuesta correcta es B.

Practica tú los siguientes problemas similares

- (1) Alberto tiene el doble de barajitas que tiene Pedro, Pedro tiene el doble de las barajitas que tiene Juan y Roberto tiene una barajita menos de las que tiene Juan. ¿Quién tiene menos barajitas?
- (2) En un examen Pedro obtuvo menos puntos que María, Rosa menos puntos que Pedro y Sonia más puntos que Tomás. Si Tomás obtuvo más puntos que María, ¿quién obtuvo el mayor puntaje?
- (4) María tiene más dinero que Jorge. Juan tiene menos dinero que Sonia y Juan tiene más dinero que Jorge. ¿Quién es el que tiene menos dinero?
- (5) Jorge es más rápido que Teresa. Pedro es más rápido que Rosa pero más lento que Teresa. Por otra parte se sabe que Jorge es más lento que Antonio y Rosa es más rápida que Manuel. Entonces, el más lento y el más rápido, respectivamente, son:
- (5) Con respecto a sus edades, Marta es un año menor que Ricardo, Pamela es tres años menor que Gerardo y Ricardo es dos años mayor que Pamela. ¿Cuál es el o la menor?

Las respuestas a estos cuatro ejercicios son:

- (1) Roberto
- (2) Sonia
- (3) Jorge
- (4) Manuel y Antonio
- (5) Pamela

Problema 4. Si en estos momentos un reloj marca las 11:18, ¿qué hora marcará en 53 minutos más?

- A. 11:71 D. 01:11
B. 12:11 E. 11:11
C. 12:61

Solución. $18 \text{ minutos} + 53 \text{ minutos} = 71 \text{ minutos}$. Luego, serán las 11 horas y 71 minutos. Pero esta hora no existe en un reloj. Los minutos se cuentan solo hasta 60. Cada 60 minutos se sustituyen por 1 hora. En nuestro caso, los 71 minutos corresponden a $60 + 11$. Es decir, corresponden a 1 hora y 11 minutos. Luego, el reloj estará marcando las 12:11.

Comentario. El error más común en este problema es marcar la respuesta A. Pero, ningún reloj marca esa hora, como fue explicado en la solución.

Para practicar más este tipo de problemas, resuelve los siguientes:

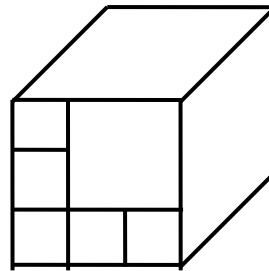
- (1) Si un reloj marca las 10:25 ¿qué hora marcará en 40 minutos más?
- (2) Si un reloj marca las 11:42, ¿qué hora marcará en 2 horas y 30 minutos más?
- (3) Si un reloj marca las 7:20, ¿qué hora marcaba hace 40 minutos?
- (4) Si un reloj marca las 8:42, ¿qué hora marcaba hace 1 hora 50 minutos?

Las respuestas a estos problemas son:

- (1) 11:05
- (2) 2:12
- (3) 6:40
- (4) 6:52

Problema 5. En una de las caras de un cubo, se están pegando cerámicas, todas de igual tamaño, como se indica en la figura. ¿Cuántas de estas cerámicas se necesitarán para cubrir todas las caras del cubo?

- A. 9
- B. 27
- C. 36
- D. 45
- E. 54



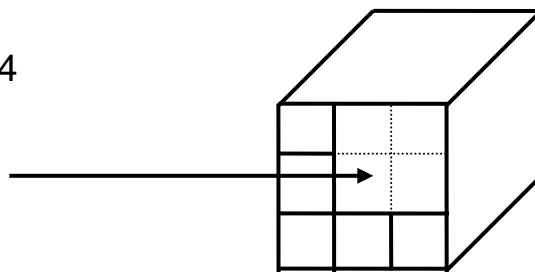
Solución. De la figura se deduce, que cada cara del cubo va a necesitar 9 cerámicas. Observa ahora que el cubo tiene 6 caras. Por ejemplo, consigue un dado y cuenta sus caras (también lee el comentario de abajo).

Entonces, ya que cada cara necesita 9 cerámicas y ya que el cubo tiene 6 caras, se van a necesitar $9 \times 6 = 54$ cerámicas.

Luego, la respuesta correcta es E.

Comentario. Una dificultad con este problema es no contar todas las caras del cubo. Hay cuatro caras laterales (algo así como las cuatro paredes de un cuarto), una cara superior (el techo del cubo) y una cara inferior (la base o el piso del cubo). Luego, un cubo tiene 6 caras. Otra dificultad es contar solo 6 de las cerámicas pedidas en cada cara; pero, el enunciado dice que se trata de cerámicas de igual tamaño.

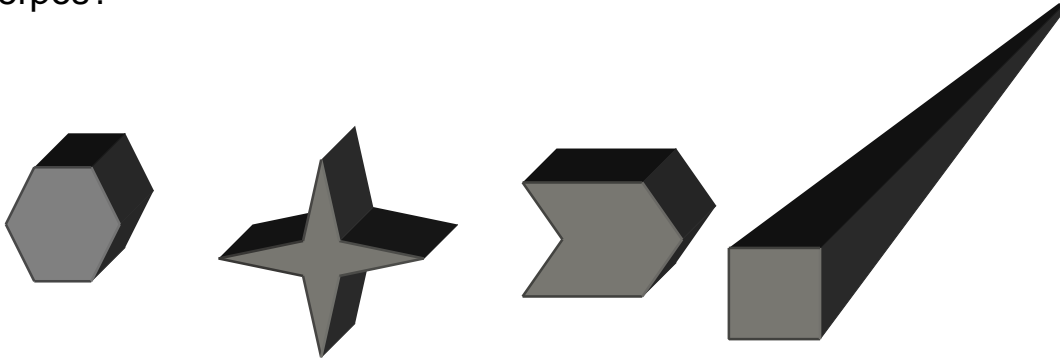
Aquí se van a pegar 4
cerámicas



Luego, en cada cara van a pegarse 9 cerámicas.

Resolvamos ahora el siguiente ejercicio acerca de las caras de un cuerpo.

¿Cuál es el número de caras de cada uno de los siguientes 4 cuerpos?



El primero (desde la izquierda) tiene la cara del frente, la cara de atrás (ambas de forma hexagonal; es decir, cada una de estas dos caras está limitada por un hexágono, que es una figura cerrada de 6 lados) y las 6 caras del contorno, llamadas caras laterales (cada una de forma rectangular). En total, este cuerpo tiene 8 caras.

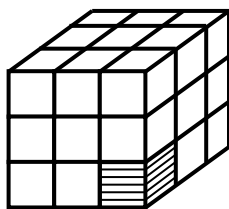
El segundo cuerpo desde la izquierda, tiene la cara del frente y la de atrás (ambas en forma de estrella) y 8 caras laterales (todas en forma rectangular). Luego, en total, este cuerpo tiene 10 caras.

El tercer cuerpo, desde la izquierda, tiene la cara anterior, la cara posterior (ambas en forma de flecha) y 6 caras laterales (cada una, de forma rectangular). En total, este cuerpo tiene 8 caras.

El último cuerpo tiene una cara anterior (en forma de cuadrado), no tiene cara posterior, ya que su parte posterior es un punto (y un punto no se considera una cara). Además tiene 4 caras laterales (cada una de ellas, en forma de triángulo). Luego, este cuerpo tiene 5 caras.

Para practicar otro poco más, resuelve el siguiente ejercicio:

¿Cuántos cubos pequeños (cubitos), como el que está rayado en la figura, forman el cubo mayor?



La respuesta es $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Con respecto al mismo cubo anterior, observa que al cubito sombreado se le ven solo tres de sus 6 caras (dos se observan a simple vista y la otra se puede observar por abajo, al levantar el cubo).

Las restantes tres caras de este cubito sombreado, están ocultas en el cubo grande y no se ven.

Responde ahora las siguientes preguntas:

- (1) ¿A cuántos de los 27 cubitos que forman el cubo grande se le observa solo una de sus 6 caras?
- (2) ¿A cuántos cubitos se le observan solo dos de sus 6 caras?
- (3) ¿A cuántos cubitos se le observan solo tres de sus 6 caras?
- (4) ¿Hay algún cubito al cuál se le observan cuatro o más de sus 6 caras?
- (5) ¿Hay algún cubito oculto, es decir, uno al que no se le observa cara alguna?

Las respectivas respuestas son:

- (1) 6
- (2) 12
- (3) 8
- (4) No.
- (5) Si. Hay uno solo (el que está al centro del cubo).

EXAMEN 2

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. El número 10010011 se lee:

- A. Un millón cien mil once
- B. Diez millones mil once
- C. Un millón diez mil once
- D. Diez millones diez mil once
- E. Diez millones cien mil once

2. ¿Cuál de los siguientes es el mayor número menor que 10?

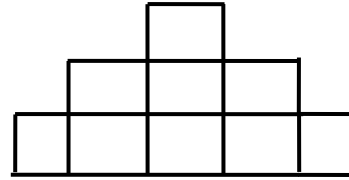
- A. 11
- B. 12
- C. 10
- D. 9
- E. 8

3. Si en Caracas son las 12 del medio día, en San Francisco de California son las 8 a.m. Si un vuelo de Caracas a San Francisco de California demora 10 horas y sale a las 9 a.m., hora de Caracas. ¿A qué hora de San Francisco de California llega el avión?

- A. 7 p.m.
- B. 11 p.m.
- C. 11 a. m.
- D. 3 p.m.
- E. 6 p.m.

4. En la figura adjunta se observa que una pirámide de 3 bloques de altura tiene 9 bloques en total. ¿Cuántos bloques tiene una pirámide similar pero con 4 bloques de altura?

- A. 25
- B. 27
- C. 12
- D. 14
- E. 16



5. Si en estos momentos son las 9:35 horas, ¿qué hora será en 1 hora y 47 minutos más?

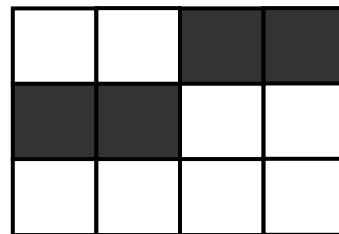
- A. 11:22
- B. 10:82
- C. 01:22
- D. 13:22
- E. 11:82

6. Si la tercera parte de 24 se multiplica por 4, se obtiene:

- A. 32
- B. 18
- C. 24
- D. 28
- E. Ninguna de las anteriores.

7. ¿Qué fracción del rectángulo de la figura es la parte sombreada?

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{4}{8}$
- C. $\frac{4}{12}$
- D. $\frac{4}{10}$
- E. $\frac{8}{12}$



8. En una carrera Jorge le ganó a Pedro, Juan terminó detrás de José y Juan le ganó a Jorge. ¿Quién ganó la carrera?

- A. Jorge
- B. Pedro
- C. Juan

- D. José
- E. Faltan datos para determinarlo.

HOJA DE RESPUESTAS

1.

A B C D E

2.

A B C D E

3.

A B C D E

4.

A B C D E

5.

A B C D E

6.

A B C D E

7.

A B C D E

8.

A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 2

1. Este problema es similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.
2. Los números que hay en las respuestas que son menores que 10 son el 9 y el 8. Se pregunta por el mayor de ellos.
3. Observa primero que en San Francisco son 4 horas menos que en Caracas. Descubre primero a qué hora de Caracas llega el avión a San Francisco. Después, debes restar 4 horas.
4. Primero dibuja la pirámide similar con los cuatro bloques de altura.
Luego, cuenta los bloques.
5. Este problema es similar al problema resuelto número 4 de esta Lección.
6. Este problema es similar al problema resuelto número 1 de esta Lección.
7. Este problema es similar al problema resuelto número 5 de la Lección 1 anterior.
8. Este problema es similar al problema resuelto número 3 de esta Lección.

LECCIÓN 3

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor?

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{4}{7}$

D. $\frac{3}{4}$
E. $\frac{3}{5}$

Solución. Piensa en una torta de forma rectangular, como lo indica la siguiente figura:



Para obtener $\frac{1}{3}$ de la torta, tú debes dividir la torta en tres partes iguales y luego debes tomar una de estas partes.

Este proceso se representa por medio de la siguiente figura:



La parte sombreada es $\frac{1}{3}$ de la torta.

Ahora, hacemos un proceso similar con las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{5}$.

Se obtiene la siguiente figura:



Comparando los tamaños de cada una de estas fracciones, se observa que $\frac{3}{4}$ es la mayor de ellas.

Luego, la respuesta correcta es D.

Comentario. La experiencia indica que las fracciones constituyen un “dolor de cabezas” para muchos; por lo tanto, es necesario practicar más con ellas.

En relación con este problema, practica los siguientes ejercicios, resolviéndolos en forma similar a como lo hemos hecho arriba:

(1) ¿Cuál de las siguientes dos fracciones $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ es la mayor?

(2) ¿Cuál de las siguientes tres fracciones $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}$ es la mayor?

(3) ¿Cuál de las siguientes dos fracciones $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}$ es la menor?

(4) ¿Cuál de las siguientes tres fracciones $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ es la menor?

Las respuestas a estos cuatro ejercicios son:

(1) $\frac{4}{5}$.

(2) $\frac{5}{8}$.

(3) $\frac{2}{7}$.

(4) $\frac{3}{7}$.

Problema 2. Cada caja de lápices tiene 10 lápices, y cada lápiz cuesta Bs. 2000. ¿Cuánto debo pagar por 6 cajas de lápices?

A. Bs. 120000

D. Bs. 18000

B. Bs. 12000

E. Bs. 26000

C. Bs. 60000

Solución. Por cada caja de lápices se debe pagar $10 \times 2000 =$ Bs. 20000. Por 6 cajas de lápices se debe pagar $20000 \times 6 =$ Bs. 120000. Luego, la respuesta correcta es A.

Comentario. Alternativamente, se puede razonar también de la siguiente forma: como cada caja de lápices contiene 10 lápices, entonces 6 cajas de lápices tendrán $10 \times 6 = 60$ lápices. Como cada lápiz cuesta Bs. 2000, entonces los 60 lápices cuestan $60 \times 2000 =$ Bs. 120000.

Practica ahora, resolviendo los siguientes problemas similares:

(1) Una caja de huevos tiene 30 huevos y cada huevo cuesta Bs. 500. ¿Cuánto debo pagar por 3 cajas de huevos?

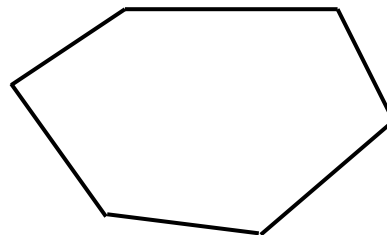
- (2) Cada paquete de cuadernos tiene una docena de cuadernos y cada cuaderno vale Bs. 3850. ¿Cuánto debo pagar por 5 paquetes de cuadernos?
- (3) El conjunto residencial Los Héroes tiene 4 edificios y cada edificio tiene 12 pisos. En cada piso hay 4 apartamentos. ¿Cuántos apartamentos hay en total en el conjunto residencial Los Héroes?
- (4) Los esposos Pedro y María tuvieron 5 hijos y cada hijo, después de casarse, tuvo 5 hijos. ¿Cuál es el número total de miembros de esta gran familia?

Las respuestas a estos problemas son:

- (1) Bs. 45000
(2) Bs. 228000
(3) 192 apartamentos
(4) 37 (no te olvides contar a las esposas o esposos de los hijos de Pedro y María).

Problema 3. ¿Cuántas diagonales tiene el polígono de la figura?

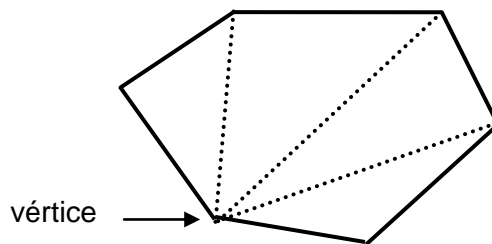
- A. 2
B. 6
C. 9
D. 18
E. Ninguna de las anteriores.



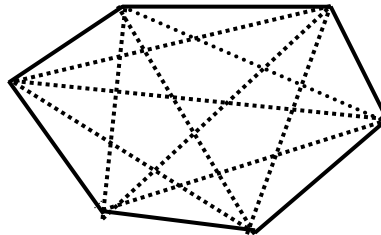
Solución. Recordemos que un vértice (o esquina) de un polígono, es el punto donde se intersectan dos lados consecutivos (es decir, dos lados seguidos) del polígono y recordemos que una diagonal en un polígono es todo trazo que une dos vértices no consecutivos del polígono.

En el caso del polígono de la figura, por cada vértice (nota que hay 6 vértices), se pueden trazar tres diagonales como lo indica la figura de abajo.

Sin embargo, no se puede decir que como hay 6 vértices y como por cada vértice hay 3 diagonales, entonces en total hay $6 \times 3 = 18$ diagonales, ya que en este caso se estarán contando algunas diagonales dos veces.



Lo mejor, es dibujar todas las diagonales y después contarlas, teniendo el cuidado de no contar una misma diagonal dos o más veces. Después de dibujar todas las diagonales, se obtiene la siguiente figura:



Se observa, entonces, que hay 9 diagonales. Luego, la respuesta correcta es C.

Comentario. Las principales dificultades en resolver este problema son:

1. No recordar lo que es diagonal en un polígono.
2. Contar menos diagonales de las que realmente son, olvidándose de trazar alguna de ellas, o por el contrario, contar más diagonales de las que son, contando algunas diagonales dos o más veces.

El polígono de la figura de arriba tiene 6 lados y se llama hexágono. Para practicar un poco más, contando las diagonales de un polígono, dibuja un heptágono (polígono de 7 lados) y cuenta las diagonales. Te deben resultar 14 diagonales.

Dibuja ahora un decágono (polígono de 10 lados), toma un vértice y dibuja todas las diagonales del decágono que nacen desde ese vértice.

¿Cuántas son?

¿Es este número de diagonales el mismo si tú tomas ahora otro vértice del decágono?

Finalmente piensa en las siguientes preguntas:

¿existe algún polígono que no tenga diagonales?

¿existe algún polígono con el mismo número de lados que de diagonales?

(Indicación: si el polígono tiene muchos lados, entonces tiene muchas diagonales y si tiene pocos lados entonces tiene pocas diagonales).

Problema 4. La edad de Liliana es el doble de la edad de José Manuel. Si José Manuel tiene 12 años, ¿qué edad tenía Liliana hace 4 años?

A. 20 años

D. 6 años

B. 8 años

E. 28 años

C. 24 años

Solución. Como José Manuel tiene 12 años y como Liliana tiene el doble de la edad de José Manuel, entonces Liliana tiene $2 \times 12 = 24$ años. En consecuencia, hace 4 años, Liliana tenía $24 - 4 = 20$ años. Luego, la respuesta correcta es A.

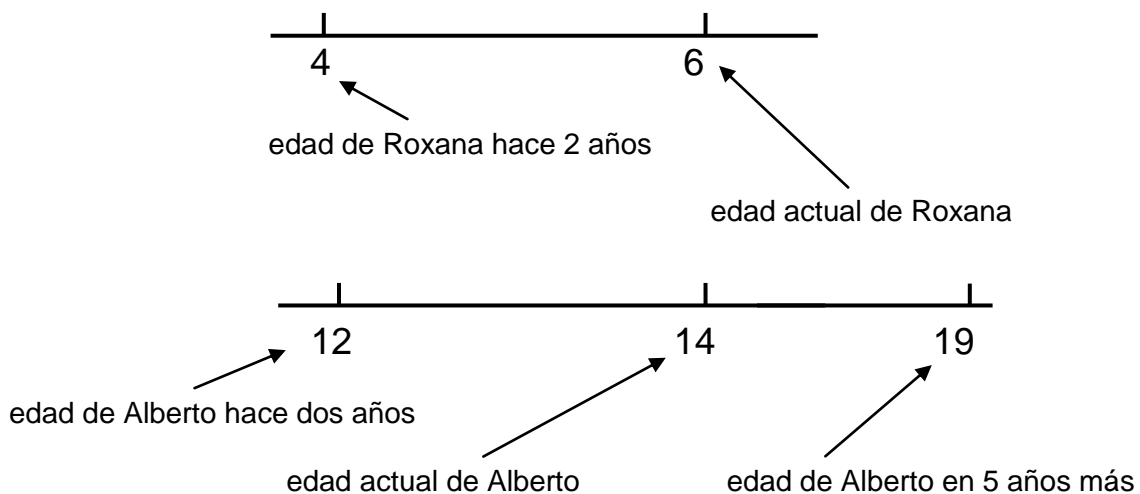
Comentario. El error más común en este problema es marcar la respuesta C, la cual indica la edad actual de Liliana. No se pregunta por la edad actual de Liliana, sino por la edad de Liliana hace 4 años.

Sin embargo, como un paso previo hacia la solución de un problema de este tipo, algunas veces es necesario saber primero las edades actuales.

Por ejemplo, y para practicar más este tipo de ejercicios, resolvamos el siguiente problema.

“Hace 2 años la edad de Alberto era tres veces la edad de Roxana. Si Roxana tiene 6 años, ¿cuál será la edad de Alberto en 5 años más?”

Para resolver este problema, razonamos de la siguiente forma, y a la par vamos haciendo un dibujo donde vamos poniendo los datos y las conclusiones que vamos obteniendo: si Roxana tiene 6 años entonces, hace 2 años, Roxana tenía 4 años.



Luego, hace 2 años, la edad de Alberto era 12 años (pues era tres veces la edad de Roxana).

Como hace 2 años, la edad de Alberto era 12 años, entonces, la edad actual de Alberto es 14 años.

En 5 años más, la edad de Alberto será 19 años.

NOTA. No olvidar que siempre es bueno tratar de hacer un dibujo, donde podamos visualizar todos los datos del problema.

Resuelve ahora los siguientes problemas similares, tratando de hacer un dibujo como lo hicimos recién.

- (4) Hace 3 años, Katherine tenía 6 años de edad. En 3 años más, la edad de Katherine será el doble de la edad de Nataly. ¿Cuál es la edad actual de Nataly?
- (5) Daniela tiene 12 años de edad. En 2 años más, su edad será el doble de la de Patricio. ¿Cuál es la edad actual de Patricio?
- (6) Hace 5 años, Carolina tenía la mitad de la edad de Jaime. Si Jaime tiene 13 años de edad, ¿cuál será la edad de Carolina en 4 años más?

Las respuestas son:

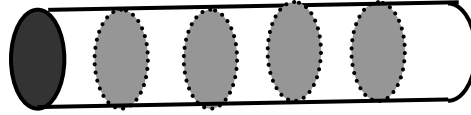
- (6) 3 años
(7) 5 años
(8) 13 años

Problema 5. Un helado con forma de cilindro, como lo indica la figura, se divide en cierto número de trozos circulares de igual ancho cada uno.
Cada trozo se vende en Bs. 3000, y después de venderlos todos, se obtuvo Bs. 15000.
¿Cuántos cortes se hicieron en el helado?

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6
E. 12



Solución. Primero, vamos a descubrir el número de trozos. Para saberlo, debemos dividir 15000 entre 3000. Es decir, del helado se obtuvieron 5 trozos. Dibujemos ahora el helado con sus 5 trozos.



Observemos que se realizaron 4 cortes en el helado (los marcados con líneas de punto), para obtener los 5 trozos.

Luego la respuesta correcta es B.

Comentario. A juzgar por la experiencia, este es un problema difícil, ya que la mayoría de los estudiantes marcan C como la respuesta correcta. No se debe confundir el número de trozos con el número de cortes, aunque a veces estos dos números pueden coincidir.

Para practicar un poco con este tipo de problemas, resuelve ahora el siguiente ejercicio:

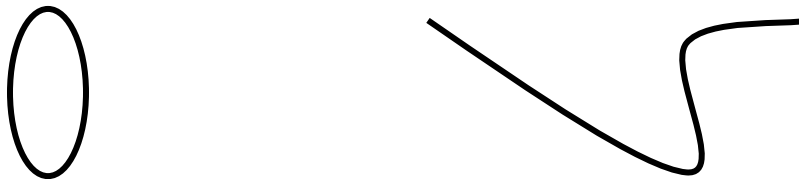
“Se divide una tela de 20 metros de largo, en trozos de 2 metros de longitud cada uno. ¿Cuántos cortes se hicieron en la tela?”

Por supuesto que antes de responder a esta pregunta, tú vas a realizar un dibujo de la tela y vas a marcar en el dibujo todos los trozos. Después que hayas hecho esto, es que vas a contar el número de cortes. Te deben resultar 9 cortes.

Sin que yo tenga que decirte las respuestas de los siguientes dos problemas, indica:

¿Cuántos cortes deben hacerse en la cuerda circular de la figura de la izquierda, abajo, para dividirla en 4 partes de igual longitud?.

¿Cuántos cortes deben hacerse en la figura de la derecha, abajo, para dividirla en 4 partes de igual longitud?



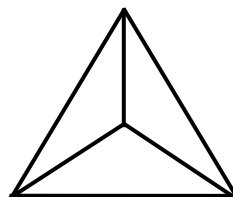
Cuidado: Las respuestas a estas dos preguntas no son las mismas.

EXAMEN 3

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la figura?

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 1
- E. 6



2. Si Camila ganara Bs. 600000 más al mes, podría gastar Bs. 800000 en ropa, Bs. 700000 en libros, Bs. 1000000 en comida, y ahorraría Bs. 250000. ¿Cuánto gana Camila al mes?

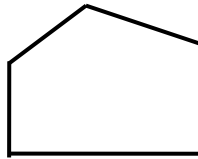
- A. Bs. 3350000
- B. Bs. 2150000
- C. Bs. 1850000
- D. Bs. 2550000
- E. Bs. 2750000

3. En un aserradero, el encargado de la sierra eléctrica cobra Bs. 2000 por cada corte que haga en un tronco. ¿Cuánto se le debe pagar para dividir un tronco en cuatro partes de igual longitud?

- A. Bs. 2000
- B. Bs. 6000
- C. Bs. 4000
- D. Bs. 5000
- D. Bs. 8000

4. ¿Cuántas diagonales tiene el polígono de la figura?

- A. 5
- B. 6
- C. 9
- D. 7
- E. 18



5. Ricardo tendrá 21 años en 6 años más. ¿Qué edad tenía Ricardo hace 4 años?

- A. 27
- B. 31
- C. 23
- D. 15
- E. 11

6. ¿Qué fracción de un año representa 4 meses?

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{8}{12}$
- C. $\frac{4}{30}$
- D. $\frac{4}{12}$
- E. $\frac{1}{12}$

7. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la mayor?

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

E. $\frac{5}{6}$

8. Cada caja de refrescos tiene una docena de refrescos y cada refresco vale Bs. 3000. ¿Cuánto debe pagar Roxana por 4 cajas de refrescos?

A. Bs. 36000

B. Bs. 72000

C. Bs. 17000

D. Bs. 144000

E. Bs. 100000

HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 3.

1. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 1 de la Lección 1.
Mira también el ejercicio 1 del examen de la Lección 1.
2. Los gastos de Camila más lo que ahorraría es igual a su sueldo actual más Bs. 600000.
3. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 5 de esta Lección.
4. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 3 de esta Lección.
5. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 4 de esta Lección.
6. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 5 de la Lección 1.
7. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 1 de esta Lección.
8. Este ejercicio es similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.

LECCIÓN 4

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. Una regla mide 75 cm (cm es la abreviación de centímetros). ¿Cuánto le falta para completar un metro?

- A. $\frac{1}{4}$ cm
- B. 25 m (m es la abreviación de metro)
- C. 75 cm
- D. $\frac{3}{4}$ m
- E. $\frac{1}{4}$ m

Solución. Antes de resolver este problema, se deben expresar todas las medidas en la misma unidad de longitud. En este caso, vamos a pasar todas las medidas de longitud a cm. Recordando que 1 m son 100 cm, el problema se reduce al siguiente:

Una regla mide 75 cm. ¿Cuánto le falta para completar 100 cm?

Le faltan, por supuesto, 25 cm. Sin embargo, esta respuesta (aparentemente), no aparece dentro de las alternativas. Vamos entonces a pasar los 25 cm a metros.

Para ello, se debe observar que 25 “cabe” exactamente 4 veces en 100. Luego, 25 cm corresponde a la cuarta parte de un metro. En otras palabras, 25 cm es igual a $\frac{1}{4}$ m. La respuesta correcta es E.

Comentario. El problema también se puede resolver en forma más directa, pasando todas las medidas de longitud a m; de la siguiente forma: 75 cm corresponden a $\frac{3}{4}$ m (ya que como hemos visto, 25 cm corresponden a $\frac{1}{4}$ m, y por lo tanto 75 cm, que es 3 veces 25 cm, corresponde a 3 veces $\frac{1}{4}$ m).

Así, a la regla le falta $\frac{1}{4}$ m para completar 1 m, ya que 4 veces $\frac{1}{4}$ m es 1 m.

Para practicar un poco más con este tipo de cosas conviene resolver los siguientes problemas de tipo intermedio:

(1) ¿Cuántos cm son $\frac{2}{10}$ m?

(2) ¿Cuántos cm son $\frac{3}{5}$ m?

(3) ¿Qué fracción de 1 m son 20 cm?

(4) ¿Qué fracción de un metro son 60 cm?

Las respuestas a estos cuatro problemas son:

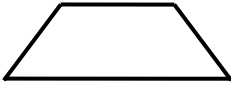
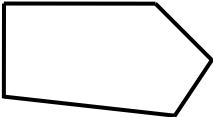

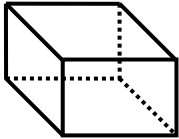
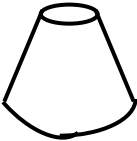
(1) 20 cm

(2) 60 cm

(3) $\frac{20}{100}$ (que es también igual a $\frac{1}{5}$ como se verá en el problema resuelto 2 de la Lección 9).

(4) $\frac{60}{100}$ (que es también igual $\frac{3}{5}$ como se verá en la Lección 9).

Problema 2. Los nombres asignados a las siguientes figuras ó cuerpos son correctos, EXCEPTO:

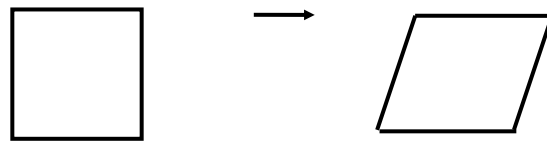
- A.  Trapecio
- B.  Pentágono
- C.  Romboide
- D.  Cuadrilátero
- E.  Cono Truncado

Solución. Recordemos primero que dos rectas son paralelas si coinciden o nunca se cortan (también dicho, tienen la misma dirección) y son perpendiculares si forman entre sí un ángulo recto (de 90°), y que un cuadrilátero es un polígono formado por cuatro lados (cuadri = cuatro, látero = lado). Si sus lados son todos iguales, el cuadrilátero se llama rombo y en este caso sus lados opuestos son paralelos. Si sus lados son todos iguales y sus lados consecutivos

son perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero se llama cuadrado. Así, un cuadrado es un caso especial de rombo.

Si tú tienes un cuadrado y lo “empujas un poco” desde el vértice superior izquierdo manteniendo la base fija (indicado por la flecha en la figura de abajo), tú tienes un rombo.

Observa que los ángulos entre dos lados consecutivos cambian, pero las longitudes de los lados no cambian:

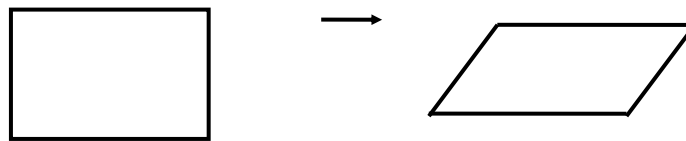


cuadrado

rombo

Un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí, se llama un romboide o paralelogramo. Si además, sus lados consecutivos forman ángulo recto (es decir, estos lados son perpendiculares entre sí), entonces el romboide se pasa a llamar rectángulo. Así, un rectángulo es un caso especial de romboide. Si tú tienes un rectángulo y lo “empujas un poco” desde el vértice superior izquierdo manteniendo la base fija (indicado por la flecha de abajo), tú tienes un romboide.

Observa que los ángulos entre dos lados consecutivos cambian, pero las longitudes de los lados no cambian):



rectángulo

romboide o paralelogramo

Como ya dijimos arriba, la palabra cuadrilátero indica cuatro lados.

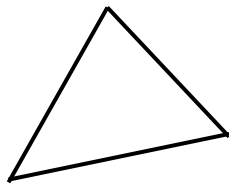
Pero, si el polígono tiene 3, 5, 6, o más lados, entonces el nombre que se asigna a dicho polígono no se refiere directamente al número de sus lados, sino que se refiere al número de ángulos internos que forman dos lados consecutivos.

Por ejemplo, decimos triángulo (tres ángulos) en lugar de decir trilátero, decimos pentágono (penta = cinco, gono = ángulo) para referirnos a un polígono de 5 lados, y decimos hexágono (seis ángulos), para referirnos a un polígono de seis lados.

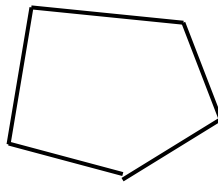
Entre paréntesis, polígono viene de poli = varios, y de gonos = ángulos. Es decir, polígono indica varios ángulos.

Un ejemplo de otro tipo es polideportivo, que indica un lugar donde se hacen varios deportes.

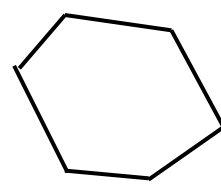
A continuación dibujamos algunos polígonos:



triángulo



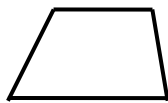
pentágono



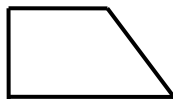
hexágono

Un cuadrilátero donde por lo menos dos de sus lados opuestos son paralelos entre sí se llama trapecio.

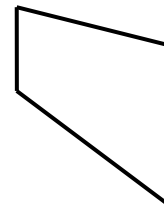
Por ejemplo, un romboide (y en particular un rectángulo), es un caso especial de trapecio. Las siguientes figuras son ejemplos, más generales, de trapecios:



trapecio



trapecio



trapecio

Volviendo ahora a nuestro problema, las respuestas A, B y C son correctas, pero D es incorrecta.

El dibujo en D no es un cuadrilátero.

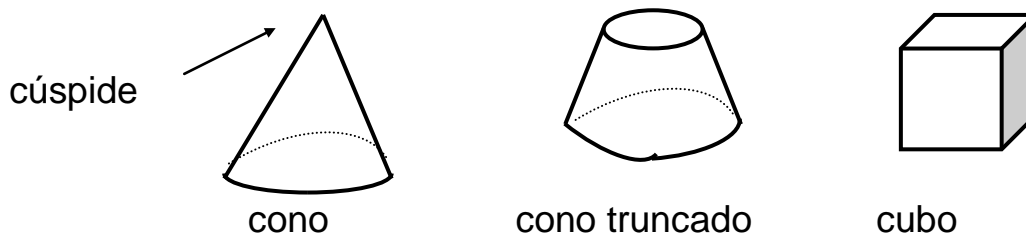
El dibujo en D es un cuerpo (ocupa un lugar en el espacio) llamado prisma recto (o paralelepípedo), pues cuando sus caras se intersectan, lo hacen formando un ángulo recto.

Por ejemplo, una caja de zapatos tiene forma de prisma recto o paralelepípedo.

Un cubo es un ejemplo de prisma recto donde todos sus lados tienen igual longitud.

Un cuerpo con forma de barquilla se llama un cono.

Si a un cono le sacamos una parte que contiene a su cúspide, lo que queda, es un cuerpo que se llama cono truncado.



En resumen, la respuesta correcta a nuestro problema es D.

Comentario. Este problema no es propiamente de habilidad matemática, sino que es de conocimiento básico, el cual nos va a permitir manejar el lenguaje necesario para resolver algunos problemas de habilidad matemática en el futuro.

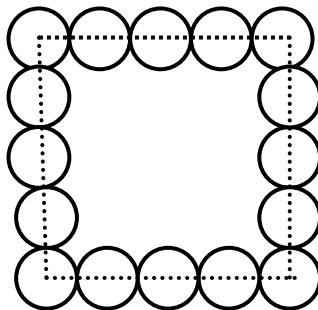
Problema 3. Para divertirse un poco, Juan Diego pone todas sus bolitas (metras), una al lado de la otra, formando un cuadrado.
Si en cada lado del cuadrado quedaron 5 bolitas, ¿cuántas bolitas tiene Juan Diego?

- A. 5
- B. 20
- C. 18
- D. 16
- E. Ninguna de las anteriores.

Solución. No te precipites, por favor, y sigue las instrucciones que hemos venido señalando repetidamente a lo largo de estas Lecciones.

Es decir, hagamos un dibujo donde podamos visualizar el enunciado del problema.

El dibujo correspondiente es el siguiente:



OK., ¿cuántas bolitas hay en total?

Hay 16 bolitas.

Observa que para que las bolitas formen un cuadrado, debe haber una bolita en cada una de las 4 esquinas.

Luego, la respuesta correcta es D.

Comentario. Aunque el problema luce sencillo, la mayoría responde que hay 20 bolitas, lo cual es incorrecto.

Si se razona de la siguiente forma: “como por cada lado hay 5 bolitas y como el cuadrado tiene 4 lados, entonces en total hay $5 \times 4 = 20$ bolitas”, se está procediendo incorrectamente pues se están

contando dos veces las bolitas que están en los vértices (es decir, en las esquinas) del cuadrado (mira el dibujo de arriba). Luego, a las 20 bolitas ya contadas, se debe restar 4 bolitas, que son las que se han contado 2 veces.

Por otro lado, si tú no pones bolitas en las esquinas, la figura que resulta no es un cuadrado.

Resuelve ahora el siguiente problema similar:

“Todos los estudiantes de un curso se forman en el patio, formando 2 cuadrados separados. Si en cada lado de cada cuadrado hay 8 estudiantes, ¿cuántos estudiantes tiene el curso?

Te deben resultar 56 estudiantes.

Resuelve finalmente el siguiente problema.

“Si 16 personas se forman constituyendo un cuadrado, ¿cuántas personas quedan en cada lado del cuadrado?

¡Cuidado! No son 4 personas.

Antes de responder, debes hacer el dibujo correspondiente.

Problema 4. Si Reinaldo tuviera 5 chocolates menos de los que tiene y le regalara 3 de ellos a Mariche, solo le quedarían 4 chocolates (a Reinaldo). ¿Cuántos chocolates tiene Reinaldo?

- A. 10
- B. 2
- C. 8
- D. 16
- E. Ninguna de las anteriores.

Solución. Si Reinaldo le regala 3 chocolates a Mariche y le quedan 4, entonces Reinaldo tiene 7 chocolates, si es que tuviera 5 chocolates menos.

En consecuencia, Reinaldo tiene, en realidad, $5 + 7$ chocolates. Es decir, Reinaldo tiene 12 chocolates.

Por lo tanto, la respuesta correcta es E.

Comentario. Se marca E como la respuesta correcta ya que ninguna de las respuestas A, B, C o D contiene la respuesta correcta.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente: Si Reinaldo tuviera 5 chocolates menos y le regalara 3 a Mariche, entonces Reinaldo tendría 8 chocolates menos.

En consecuencia, el problema se reduce al siguiente:

“Si Reinaldo tuviera 8 chocolates menos, tendría 4 chocolates.
¿Cuántos chocolates tiene Reinaldo?”

La respuesta, es que Reinaldo, tiene $4 + 8 = 12$ chocolates.

También, se puede resolver el problema, chequeando una por una las respuestas dadas.

A modo de ejemplo, chequeemos la respuesta A.

Supongamos que Reinaldo tiene 10 chocolates. Si tuviera 5 menos, tendría $10 - 5 = 5$ chocolates. Si le regalara 3 de ellos a Mariche, entonces le quedarían $5 - 3 = 2$ chocolates, y no 4, como dice el enunciado.

Luego, A no es la respuesta correcta.

El lector debe ahora continuar chequeando de esta forma las respuestas B, C, D y E.

Para practicar un poco más este tipo de ejercicios, resuelve ahora los siguientes dos problemas:

- (1) Si Liliana tuviera Bs. 2000 más de los que tiene, le alcanzaría justo para comprar un helado de Bs. 7500. ¿Cuánto dinero tiene Liliana?
- (2) Rita compra Bs. 4800 de pan y Bs. 14500 de queso. Si paga con un billete de Bs. 50000, ¿cuánto vuelto le deben dar?

Las respuestas son:

- (1) Bs. 5500
(2) Bs. 30700

Problema 5. Juan Diego compró un helado y un chocolate. El niño pagó Bs. 14000 en total. Si el helado vale Bs. 5000 más que el chocolate, ¿cuánto vale el chocolate?

- A. Bs. 9000
B. Bs. 8200
C. Bs. 3000
D. Bs. 4500
E. Bs. 5000

Solución. Si el helado y el chocolate valieran lo mismo, cada uno de ellos valdría $14000:2$ bolívares; es decir, Bs. 7000. Pero, el helado es Bs. 5000 más caro que el chocolate. Luego, el chocolate vale menos que Bs. 7000. Por lo tanto, las respuestas A y B quedan descartadas.

Vamos a chequear ahora si la respuesta C es la correcta.

Si el chocolate vale Bs. 3000, entonces el helado vale:

$$\text{Bs. } 3000 + \text{Bs. } 5000 = \text{Bs. } 8000.$$

Luego, en total, se debe pagar $\text{Bs. } 3000 + \text{Bs. } 8000 = \text{Bs. } 11000$.

Pero, se pagó Bs. 14000. Así, C no es la respuesta correcta.

Vamos a chequear ahora si la respuesta D es la correcta.

Si el chocolate vale Bs. 4500, entonces el helado vale:

$$\text{Bs. } 4500 + \text{Bs. } 5000 = \text{Bs. } 9500.$$

Luego, en total, se debe pagar Bs. 4500 + Bs. 9500 = Bs. 14000, que es precisamente lo que el niño pagó.

Por lo tanto, ya que una sola es la respuesta correcta, la respuesta correcta es D.

Comentario. El problema se puede resolver también, sin tener que ir chequeando las respuestas una a una.

Para ello, se razona de la siguiente forma:

Si el helado y el chocolate valieran igual, cada uno costaría Bs. 7000.

Pero como el helado vale Bs. 5000 más que el chocolate, entonces estos Bs. 5000 se dividen por 2.

Bs. 2500 de ellos se agregan al helado y los otros Bs. 2500 se restan al chocolate (pues de esta forma es que la suma total de Bs. 14000 que se pagó, no se altera y la diferencia entre el precio del helado y del chocolate será de Bs. 5000).

Luego, el helado vale:

$$\text{Bs. } 7000 + \text{Bs. } 2500 = \text{Bs. } 9500,$$

y el chocolate vale:

$$\text{Bs. } 7000 - \text{Bs. } 2500 = \text{Bs. } 4500.$$

Escrito este proceso en términos matemáticos, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Bs. } 14000 &= \text{Bs. } 7000 + \text{Bs. } 7000 = \\ (\text{Bs. } 7000 + \text{Bs. } 2500) + (\text{Bs. } 7000 - \text{Bs. } 2500) &= \\ &= \text{Bs. } 9500 + \text{Bs. } 4500. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el helado vale Bs. 9500 y el chocolate vale Bs. 4500.

Este problema no es fácil (en principio) y antes de seguir adelante, un estudiante interesado, debe usar el procedimiento recién expuesto para resolver los siguientes 4 problemas.

- (1) Valeska compra una pera y una manzana, pagando en total Bs. 3000. Si la pera vale Bs. 200 más que la manzana, ¿cuánto vale la manzana y cuánto vale la pera?
- (2) Hugo tiene bolitas en su mano izquierda y tiene bolitas en su mano derecha. En total, Hugo tiene 28 bolitas en sus manos.

Si Hugo tiene, en su mano derecha, 6 bolitas más que en su mano izquierda, ¿cuántas bolitas tiene Hugo en cada mano?

- (3) La señora Siomara compra un loro y una jaula, pagando en total Bs. 18.000. Si el loro vale Bs. 2.000 más que la jaula, ¿cuánto vale el loro y cuánto vale la jaula?
- (4) Un equipo de béisbol juega 20 partidos y pierde 4 más de los que gana. ¿Cuántos partidos ganó y cuántos perdió?

Las respuestas a estos problemas son:

- (1) La pera vale Bs. 1600 y la manzana vale Bs. 1400.
- (2) En la mano derecha tiene 17 y en la izquierda tiene 11 bolitas.
- (3) El loro vale Bs. 10.000 y la jaula vale Bs. 8.000.
- (4) Ganó 8 y perdió 12.

EXAMEN 4

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. Si un número se multiplica por 3 resulta 12. ¿Cuál es el número?

- A. 3
- B. 4
- C. 12
- D. 36
- E. 15

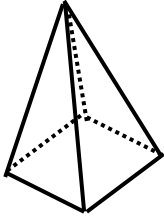
2. Un ascensor inicia su descenso desde el 10^o piso con 8 pasajeros, y se detiene solo en los pisos pares. En cada parada bajan 6 pasajeros y suben 4. ¿Con cuántos pasajeros llega al piso 2?

- A. 6
- B. 4
- C. 8
- D. 2
- E. 0

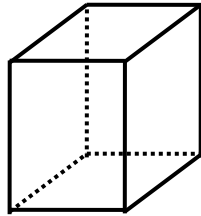
3. La cuarta parte de un número es 12. ¿Cuál es el número?

- A. 48
- B. 12
- C. 3
- D. 36
- E. 8

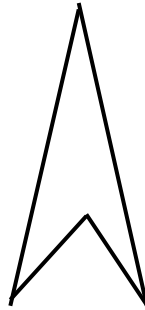
4. Un tetraedro es un cuerpo de cuatro caras. ¿Cuál de los siguientes es un tetraedro?



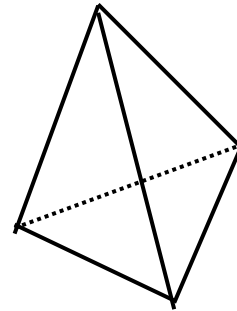
A.



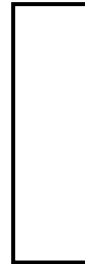
B.



C.



D.



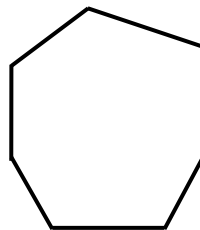
E.

5. Betina compró 2 metros de cinta y utilizó solamente 125 cm. ¿Cuánta cinta le sobró a Betina?

- A. 75 m
- B. 25 cm
- C. $\frac{3}{4}$ m
- D. $\frac{1}{4}$ cm
- E. $\frac{3}{4}$ cm

6. ¿Cuántas diagonales tiene el polígono de la figura?

- A. 14
- B. 6
- C. 9
- D. 12
- E. 18



7. Alberto juega 15 partidos de ajedrez y gana 3 partidos más que los que pierde. ¿Cuántos partidos ganó Alberto?

- A. 15
- B. 8
- C. 6
- D. 9
- E. 12

8. En cuatro años más, la edad de Daniela será el doble de la edad de Carolina.
Si Daniela tiene 12 años, ¿cuál es la edad de Carolina?

- A. 6 años
- B. 24 años
- C. 12 años
- D. 8 años
- E. Ninguna de las anteriores.

HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 4

1. Aquí no se pide multiplicar 3 por 12. Observa primero que el número que se busca debe ser menor que 12.
2. No olvides hacer un dibujo de los pisos 10, 8, 6, 4 y 2.
3. No se pregunta por la cuarta parte de 12. Primero observa que el número que se pide debe ser mayor que 12.
4. Los dibujos en C y en E no son cuerpos. Son figuras planas. Los dibujos en A, B y D son cuerpos. El cuerpo en A tiene 5 caras: la base y las 4 caras laterales. Continúa.
5. Le sobró 75 cm. Lee ahora el problema resuelto 3 de esta Lección. Allí se dijo que 25 cm es $\frac{1}{4}$ m.

Observa que $75 \text{ cm} = 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm} + 25 \text{ cm}$.

$$\text{Luego, } 75 \text{ cm} = \frac{1}{4} \text{ m} + \frac{1}{4} \text{ m} + \frac{1}{4} \text{ m} = \frac{3}{4} \text{ m}$$

6. Similar al problema resuelto 3 de la Lección 3.
7. Similar al problema resuelto 5 de esta Lección.
8. Similar al problema resuelto 4 de la Lección 3.

LECCIÓN 5

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. Un perro pesa 8 kilos más que la mitad de su peso.
¿Cuántos kilos pesa el perro?

- | | | | |
|----|---|----|----|
| A. | 4 | D. | 12 |
| B. | 6 | E. | 16 |
| C. | 8 | | |

Solución. El peso del perro se divide en dos partes iguales: su primera mitad y su segunda mitad.

Luego, el enunciado del problema dice que el perro pesa 8 kilos más que su primera mitad.

Por lo tanto, su segunda mitad pesa 8 kilos.

Pero, las dos mitades pesan lo mismo.

Es decir, el problema dice que la mitad del perro pesa 8 kilos. En consecuencia, el perro pesa 16 kilos.

Por lo tanto, la respuesta correcta es B.

Comentario. Este problema, aunque sencillo, luce difícil para la mayoría de los estudiantes.

Por lo tanto es necesario practicar más. Para ello, resuelve los siguientes problemas similares:

- (1) Alberto tiene Bs. 2000 más que la mitad de lo que tiene en total. ¿Cuánto dinero tiene Alberto?
- (2) ¿Cuál es el doble de la mitad de 12?
- (3) ¿Cuál es el número que es 15 unidades más que su mitad?
- (4) Ana tiene 8 libros menos que el doble de todos los libros que tiene. ¿Cuántos libros tiene Ana?

Las respuestas a estos cuatro problemas son:

- (1) Bs. 4000
- (2) 12
- (3) 30
- (4) 8

Problema 2. En la sucesión de números 2, 4, 6, ... , el primer término es 2, el segundo término es 4, y cada término que sigue se obtiene sumando sus dos términos anteriores. ¿Cuál es el octavo término?

- A. 8
- B. 10
- C. 26
- D. 42
- E. 68

Solución. El tercer término de la sucesión es el que está en el lugar 3. Es decir, el tercer término es 6.

El cuarto término (es decir, el que está en el lugar 4), ya no aparece. Debemos calcularlo según dice el enunciado.

El cuarto término es la suma de sus dos anteriores.

Esto es, el cuarto término es $4 + 6 = 10$.

Similarmente, el quinto término (es decir, el que está en el lugar 5) es: $6 + 10 = 16$.

El sexto término (el que está en el lugar 6) es: $10 + 16 = 26$.

El séptimo término (el que está en el lugar 7) es: $16 + 26 = 42$.

El octavo término (el que está en el lugar 8) es: $26 + 42 = 68$.

Luego, la respuesta correcta es E.

Comentario. Observemos que la lista de los 8 primeros términos de la sucesión dada son:

2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68.

Y tú puedes seguir calculando más términos.

Por ejemplo, calcula el décimo término (el décimo término es el que está en el lugar 10).

Ahora vamos a aprovechar la oportunidad para corregir dos errores muy comunes. El primero, es acerca de una oración como la siguiente:

“Hoy se celebra el doceavo aniversario del Liceo”.

Un doceavo indica que una torta se divide en 12 partes iguales y se toma una de ellas. Además, doceavo, no tiene otro significado.

Para referirse al aniversario número 12, no se dice: el “doceavo aniversario”; sino que se dice: el décimo segundo aniversario.

La confusión se presenta porque, por ejemplo, se usa octavo para indicar que una torta se divide en 8 partes iguales y se toma una de ellas.

Pero, también se usa la misma palabra octavo para decir: el octavo aniversario.

Sin embargo, para aniversarios mayores que 10, se usa décimo primero, décimo segundo, décimo tercero, y así sucesivamente.

Otro ejemplo, pero ahora para el caso de una sucesión de números, tenemos que: no se puede hablar del “catorceavo término” de la sucesión. Se dice el decimocuarto término (o término de lugar 14).

Si tú, en algún momento no lo recuerdas, entonces puedes decir: el término de lugar 14, en sustituto de decir el décimo cuarto término.

Pero, en ningún caso vas a decir el catorceavo término.

Y en el caso de la frase del aniversario, tú puedes decir: aniversario número 12 (en lugar de decir el décimo segundo aniversario); pero, en ningún caso vas a decir el doceavo aniversario.

Otro error muy común, es plantear problemas sobre sucesiones en la siguiente forma:

¿cuál es el octavo término de la sucesión 2, 4, 6 ... ?

Planteadas la pregunta de esta forma, tú estás obligado (obligada), a adivinar cual es la ley de formación que tenía en mente el autor de la pregunta.

Y el sentido de la matemática no es precisamente este.

Por ejemplo, un estudiante puede pensar que se trata de los números pares y entonces obtendrá: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... , donde el octavo término en este caso es 16.

Pero otro estudiante, puede pensar que los números se obtienen sumando sus dos anteriores, obteniéndose: 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, ... , donde el octavo término es ahora 68.

Por último, otro estudiante (que tenga un concepto matemático claro de lo que es una sucesión de números), puede decir que el octavo término es cualquier número, y su respuesta desde el punto de vista matemático, es también correcta.

En resumen, cuando se pida por algún término de alguna sucesión de números, se debe dar su ley de formación.

Volviendo ahora a los problemas sobre sucesiones, resuelve (imitando como lo hicimos en el problema de arriba) los siguientes problemas:

- (1) En la sucesión 3, 6, 9, , el primer término es 3, el segundo es 6. Si la diferencia (es decir, la resta) entre un número y su anterior es siempre igual a 3, ¿cuál es el vigésimo término (esto es, el término de lugar 20).
- (2) En la sucesión 1, 2, 4, ... , el primer término es 1 y cada término restante se obtiene multiplicando su término anterior por 2. ¿Cuál es el décimo primer término?

- (3) En la sucesión 1, 3, 6, 10, ... , el primer término es 1 y la diferencia (es decir, la resta) entre cada término y su anterior va aumentando en una unidad. ¿Cuál es el séptimo término?

Las respuestas son:

- (1) 60
(2) 1024
(3) 28

Problema 3. Un reloj se adelanta 3 minutos en cada hora y en estos momentos marca las 11: 05.
Hace 4 horas arrancó con la hora exacta.
¿Cuál es la hora exacta ahora?

- A. 11:05 D. 11:09
B. 10:53 E. 10:17
C. 11:17

Solución. En las cuatro horas que el reloj ha estado andando, se ha adelantado $4 \times 3 = 12$ minutos. Como el reloj marca las 11:05 y como está adelantado, entonces la hora exacta es 11:05 menos 12 minutos.

Para los efectos de poder restar más fácilmente, escribimos 11: 05 como 10 horas y 65 minutos.
Con 12 minutos menos son las 10 horas y 53 minutos.
La respuesta correcta es B.

Comentario. El error más común aquí es sumar 12 minutos a las 11:05, respondiendo C. Debes observar que si un reloj se adelanta, entonces, la hora exacta es menor que la hora que marca.

Para practicar un poco más, resuelve los siguientes problemas:

- (1) Un reloj se adelanta 2 minutos en cada hora. Arrancó hace 3 horas con la hora exacta, y eran las 8:45. ¿Qué hora marca el reloj ahora?
- (2) Un reloj se atrasa 3 minutos en cada hora. Arrancó hace 5 horas con la hora exacta, y eran las 9:28. ¿Qué hora marca el reloj ahora?
- (3) Un reloj se atrasa 4 minutos en cada hora y en estos momentos marca las 10:24. Hace 6 horas arrancó con la hora exacta. ¿Cuál es la hora exacta ahora?

Las respuestas son:

- (1) 8:39
- (2) 9:43
- (3) 10:48

Problema 4. Cada caja de lápices tiene una docena de lápices. ¿Cuántas cajas se necesitan para guardar 192 lápices?

- | | | | |
|----|-----|----|------|
| A. | 192 | D. | 2304 |
| B. | 20 | E. | 12 |
| C. | 16 | | |

Solución. Recuerda que una docena de lápices son 12 lápices. En términos matemáticos, el problema dice:

¿Cuántas veces cabe 12 en 192?

Se trata entonces, de hacer la división $192:12$. ¡Hazla!. Resulta 16. Luego, la respuesta correcta es C.

Comentario. El único problema aquí es que, según lo indica la experiencia, varios estudiantes no recuerdan cómo dividir por un número de dos cifras.

Si tienes calculadora, no hay problema; simplemente úsala si tu profesor lo permite.

En caso contrario, revisa tu libro de matemáticas del colegio para recordar estas divisiones.

Para practicar, realiza las siguientes divisiones:

- (1) 432:18
- (2) 925:25
- (3) 1920:15
- (4) 2842:14

Las respuestas son:

- (1) 24
- (2) 37
- (3) 128
- (4) 203

Resuelve ahora los siguientes problemas adicionales:

- (5) Entre 5 estudiantes compran un libro que costó Bs. 24.000. ¿Cuánto debe pagar cada uno?
- (6) Una caja con lápices vale Bs. 9600. Cada lápiz sale a Bs. 320. ¿Cuántos lápices tiene la caja?
- (7) 2 docenas de huevos valen Bs. 12.000. ¿Cuánto vale cada huevo?
- (8) En una fiesta se reparten 113 pastelitos entre todos los invitados. A cada uno les correspondió 6 pastelitos y sobraron 5 pastelitos. ¿Cuántos invitados había en la fiesta?

Las respuestas a estos problemas son:

- (5) Bs. 4.800
- (6) 30
- (7) Bs. 500
- (8) 18 (observa que si a los 113 pastelitos le resto los 5 que

sobraron, entonces los 108 restantes se dividen por 6 en forma exacta entre todos los invitados)

Problema 5. Las siguientes igualdades son falsas, EXCEPTO:

- A. $3^2 + 3^2 = 6^2$.
- B. $(3 + 3)^2 = 3^2 + 3^2$.
- C. $(2 + 2 + 2)^2 = 2^3 + 2^3 + 2^3$.
- D. $\frac{3^2 + 3^2}{2} = \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3}\right)^2$.
- E. $\left(\frac{2+2}{2}\right)^2 = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}$.

Solución. El problema dice que una sola de las igualdades en A, B, C, D, E es verdadera y las restantes son falsas.

Se pide encontrar cuál es la verdadera.

Para ello, debemos ir chequeando una por una cada respuesta.

Para chequear la respuesta en A, tenemos que $3^2 = 3 \times 3 = 9$. Luego, $3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$. Pero, $6^2 = 6 \times 6 = 36$. Así, la igualdad $3^2 + 3^2 = 6^2$ es falsa, pues 18 no es igual a 36. Luego, la respuesta correcta no es A.

Para chequear la respuesta en B, tenemos que $(3 + 3)^2 = 6^2 = 6 \times 6 = 36$. Pero, $3^2 + 3^2 = (3 \times 3) + (3 \times 3) = 9 + 9 = 18$. Luego, la respuesta correcta no es B.

Ahora, chequeamos la respuesta en C. Tenemos que $(2 + 2 + 2)^2 = 6^2 = 6 \times 6 = 36$. Pero, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Luego, $2^3 + 2^3 + 2^3 = 8 + 8 + 8 = 24$. Así, la igualdad $(2 + 2 + 2)^2 = 2^3 + 2^3 + 2^3$ es falsa. Por lo tanto, la respuesta correcta no es C.

Para chequear D, nota que $\frac{3^2 + 3^2}{2} = \frac{(3 \times 3) + (3 \times 3)}{2} = \frac{9 + 9}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

Por otro lado, $\left(\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3}\right)^2 = (1+1+1)^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$. Luego, ¡por fin!, la respuesta correcta es D.

Aunque no necesitamos chequear la respuesta E, ya que solo una respuesta es la correcta, el lector haría bien en verificar que la igualdad en E es falsa, para así ejercitar un poco más este tipo de cosas.

Comentario. Este es un ejercicio sobre potencias. El estudiante solo debe recordar que si a es cualquier número natural, entonces:

$$\begin{aligned}a^2 &= a \times a, \\a^3 &= a \times a \times a, \\a^4 &= a \times a \times a \times a,\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

En la expresión a^2 , a se llama la base y 2 se llama el exponente.

Por ejemplo, 3^2 no es 6, pues 3^2 no es 3×2 (es decir, no se multiplica la base por el exponente), sino que es $3 \times 3 = 9$; es decir, se repite la base 3, como factor, tantas veces como lo indica el exponente 2.

Igualmente, 4^3 no es 12, pues 4^3 no es 4×3 , sino que es $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Es decir, 4^3 no significa que se multiplica la base 4 por el exponente 3, sino que significa que la base 4 se repite como factor 3 veces; es decir, $4^3 = 4 \times 4 \times 4$.

Finalmente, se debe tener un poco de cuidado con el lenguaje ya que, decir que 4 se repite como factor 3 veces, no significa que el cuatro se multiplica consigo mismo 3 veces, pues en realidad, en la expresión $4 \times 4 \times 4$, tú solo multiplicas dos veces; a saber, $4 \times 4 = 16$ y $16 \times 4 = 64$.

Para ejercitar más con potencias, resuelve los siguientes problemas:

(1) Calcula $\frac{2^2 + 2^2}{2}$

(2) Calcula $\frac{2^3 + 2^3}{2+2}$

(3) Calcula $(2 + 2)^2 - (2^2 + 2^2)$

Las respuestas son:

(1) 4

(2) 4

(3) 8

EXAMEN 5

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. En la sucesión 1, 2, 2, 4, ... , el primer término es 1, el segundo término es 2 y cada término sucesivo, se obtiene multiplicando sus dos términos anteriores. ¿Cuál es el séptimo término?

- A. 8
- B. 32
- C. 256
- D. 64
- E. Ninguna de las anteriores.

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a 0?

- A. $(2 + 2)^2 - (2^2 + 2^2)$
- B. $(2 + 2)^2 - 2^2 - 2^2$
- C. $\frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2+2}{2}$
- D. $(2+2+2)^2 - \frac{2+2+2}{2+2+2}$
- E. $2 + \frac{2}{2} - \frac{2^2 + 2^2}{2}$

3. Un reloj se atrasa 2 minutos en cada hora, y marca en estos momentos las 12:08. Si hace 6 horas arrancó con la hora exacta, ¿cuál es la hora exacta ahora?

- A. 11 : 56
- B. 12 : 20
- C. 12 : 10
- D. 12 : 06
- E. 12 : 14

4. Pepe compró un televisor por Bs. 225.000 y lo debe pagar en 20 cuotas iguales. ¿A cómo sale cada cuota?

- A. Bs. 22.500
- B. Bs. 45.000
- C. Bs. 20.000
- D. Bs. 11.250
- E. Bs. 12.000

5. Juan trae una tabla de 8 metros de largo para cortarla en trozos de 2 metros de largo cada uno. ¿Cuántos cortes se deben hacer en la tabla?

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 9
- E. 16

6. Un enfermo debe tomar una aspirina cada media hora. ¿En cuánto tiempo se toma 4 aspirinas?

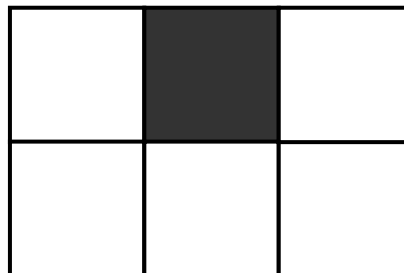
- A. en media hora
- B. en una hora
- C. en una hora y media
- D. en dos horas
- E. en dos horas y media

7. Pamela tiene 6 chocolates más que la mitad de los que tiene. ¿Cuántos chocolates tiene Pamela?

- A. 3
- B. 6
- C. 9
- D. 12
- E. 15

8. ¿Qué fracción del rectángulo es la parte sombreada?

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{2}$
- E. Ninguna de las anteriores.



HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 5

1. Similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.
2. Similar al problema resuelto número 5 de esta Lección.
3. Similar al problema resuelto número 3 de esta Lección.
4. Similar al problema resuelto número 4 de esta Lección.
5. Similar al problema resuelto 5 de la Lección 3.
6. Similar al problema resuelto 3 de la Lección 4.
7. Similar al problema resuelto 5 de la Lección 4.
8. Similar al problema resuelto 5 de la Lección 1.

LECCIÓN 6

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. El 20 de enero de un cierto año fue Jueves. ¿Qué día de ese año cayó el 3 de enero?

- A. lunes
- B. miércoles
- C. viernes
- D. domingo
- E. ninguno de los anteriores

Solución. Para resolver este problema, debemos hacer un dibujo de ese mes de enero. Si el mes arrancara con el lunes 1, entonces como cada semana tiene 7 días, el 20 caería el sábado de la tercera semana. Pero, el 20 es jueves y no sábado. Luego, el jueves 20 tiene que corresponder a la cuarta semana de enero. El dibujo correspondiente, es el siguiente:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
			20			

Ahora empezamos a llenar en forma regresiva los números de los días de este mes antes del 20. El 19 es miércoles, el 18 es martes, y así sucesivamente, hasta tener el siguiente dibujo:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20			

Así, vemos que el 3 de enero cayó día lunes.

Luego, la respuesta correcta es A.

Resuelve tú, haciendo el dibujo correspondiente, los siguientes problemas similares.

- (1) En un mes de abril, el 5 cayó día lunes. ¿Qué día de la semana fue el 18 de ese mes?
- (2) En un mes de diciembre, la Navidad (25 de diciembre) cayó día domingo. ¿Qué día de la semana cayó el 12 de ese mes?
- (3) El 31 de un mes de Julio fue sábado. ¿Qué día de la semana de ese mes fue el 5 de julio?

Las respuestas son:

- (1) Domingo
- (2) Lunes
- (3) Lunes

Problema 2. ¿Cuál de los siguientes es el menor número entero mayor que 9?

- | | | | |
|----|---|----|----|
| A. | 7 | D. | 10 |
| B. | 8 | E. | 11 |
| C. | 9 | | |

Solución. Los números enteros mayores que 9 son:

10, 11, 12, 13, 14,

El menor de ellos es el 10. Por lo tanto, el menor número entero mayor que 9 es el 10.

Luego, la respuesta correcta es D.

Comentario. La experiencia indica que este es un problema difícil ya que su enunciado no es fácil de captar. En consecuencia, debes resolver los siguiente problemas adicionales, en forma similar a como lo hicimos recién.

En este nivel, un número entero es un número entero positivo; es decir, es uno entre 1, 2, 3, 4, 5, 6,

- (1) ¿Cuál es el menor número entero que es mayor que 6?
- (2) ¿Cuál es el mayor número entero que es menor que 15?
- (3) ¿Cuál es el menor entero que es mayor que el cuadrado de 4?
- (4) ¿Cuál es el mayor entero que es menor que la mitad de 10?

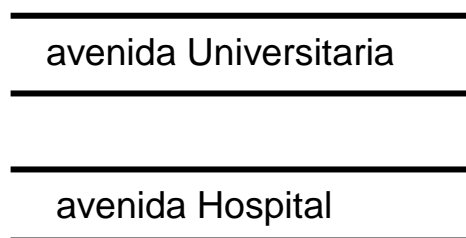
Las respuestas son:

- (1) 7
- (2) 14
- (3) 17
- (4) 4

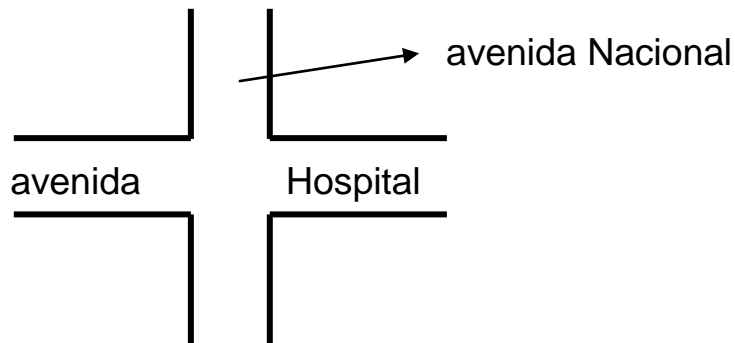
Problema 3. La avenida Universitaria es paralela a la avenida Hospital. La avenida Hospital es perpendicular a la avenida Nacional. Entonces deduce que:

- A. La avenida Universitaria es perpendicular a la avenida Hospital
- B. La avenida Universitaria es paralela a la avenida Nacional
- C. La avenida Hospital es paralela a la avenida Nacional
- D. La avenida Universitaria es perpendicular a la avenida Nacional
- E. La avenida Universitaria es paralela a la avenida Nacional

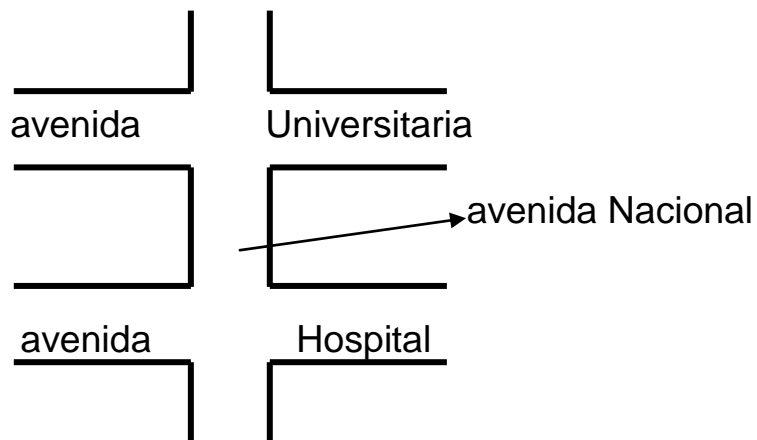
Solución. Primero vamos a hacer un dibujo de las avenidas Universitaria y Hospital. Ellas son paralelas. Esto significa que ellas nunca se cortan entre sí. Su dibujo es del siguiente tipo:



Por otro lado, la avenida Hospital es perpendicular a la avenida Nacional. Esto significa que estas avenidas se cortan formando un ángulo de 90° . Es decir, se cortan formando un ángulo recto. Su correspondiente dibujo es entonces el siguiente:



Juntando ahora los dos dibujos obtenidos en uno solo, tenemos:



Ahora vamos chequeando cada una de las respuestas dadas en el problema para ver cuál es la que se ajusta al dibujo. Haz tú mismo este proceso. Te darás cuenta que la respuesta correcta es D.

Resuelve ahora los siguientes problemas en forma similar a como lo hicimos arriba.

Los problemas (1) al (5) de abajo se refieren al siguiente enunciado:

“La avenida Independencia es paralela a la avenida los Héroes. La avenida Andrés Bello es perpendicular a la avenida Simón Bolívar. La avenida Simón Bolívar es perpendicular a la avenida Los Héroes”.

Indica cuáles de las siguientes aseveraciones son verdaderas.

- (1) La avenida Simón Bolívar es perpendicular a la avenida Independencia.
- (2) La avenida Andrés Bello es paralela a la avenida Independencia.
- (3) La avenida Los Héroes es perpendicular a la avenida Simón Bolívar.
- (4) La avenida Independencia es paralela a la avenida Andrés Bello.
- (5) La avenida Los Héroes es perpendicular a la avenida Andrés Bello.

Las respuestas son:

- (1) Verdadera
- (2) Verdadera
- (3) Verdadera
- (4) Verdadera
- (5) Falsa

Problema 4. ¿Cuál es la suma de todos los divisores de 28?
--

- A. 28
- B. 56
- C. 14
- D. 9
- E. 10

Solución. Por ejemplo, 2 es un divisor de 28 pues $28:2 = 14$ es un número entero (es decir, sin decimales). Sin embargo, 3 no es un

divisor de 28 pues $28:3$ no es un número entero pues 3 “no cabe” exactamente en 28. Con esta explicación, nos podemos dar cuenta que 1, 2, 4, 7, 14, 28 es la lista de todos los divisores de 28. La suma de todos ellos es 56. Luego, la respuesta correcta es B.

Comentario. Todo número entero mayor que 1 tiene siempre dos divisores a la vista: 1 y el mismo número. Se llaman los divisores triviales. Por ejemplo, 1 y 28 son los divisores triviales de 28.

Si los únicos divisores de un número entero mayor que 1 son los triviales, el número se llama número primo.

Por ejemplo, 28 no es un número primo pues además de los divisores triviales, los números 2, 4, 7, 14 son también divisores de 28.

Sin embargo, los únicos divisores 13 son 1 y 13. Luego, 13 es un número primo.

La siguiente es la lista de los números primos menores que 100:

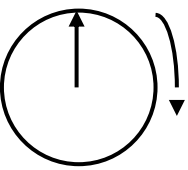
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 ,
61 , 67 , 71 , 73 , 79 , 83 , 89 , 97.

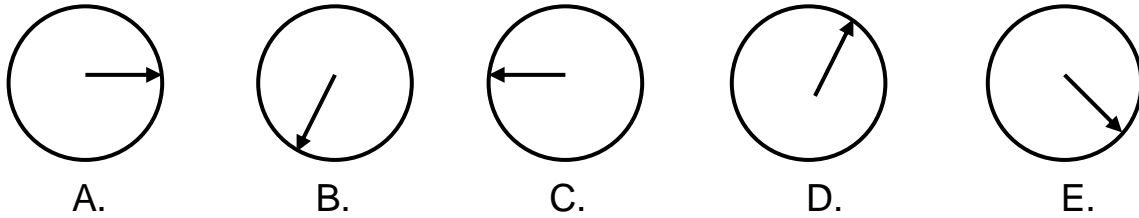
Practica ahora, resolviendo los siguientes problemas:

- (1) Escribe la lista de todos los divisores de 24.
- (2) Escribe la lista de todos los divisores de 75.
- (3) ¿Cuál es el producto de todos los divisores de 9?
- (4) ¿Cuál es la suma de todos los divisores de 36?

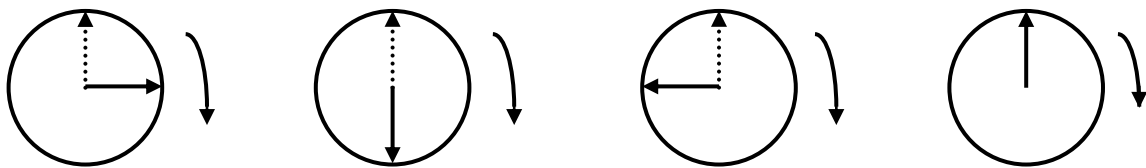
Las respuestas son:

- (1) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
- (2) 1, 3, 5, 15, 25, 75.
- (3) 27 (los divisores de 9 son: 1, 3, 9)
- (4) 91 (los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36)

<p>Problema 5. La flecha recta dentro del círculo, realiza dos giros consecutivos de 270° (270 grados) y 120° (120 grados), ambos en el sentido de las agujas del reloj, como lo indica la flecha curvada. ¿Cuál de las siguientes es la posición de la flecha recta después de realizar estos giros?</p> 



Solución. Veamos primero algunos giros típicos, todos ellos en el sentido de las agujas del reloj:



Giro de 90°

Giro de 180°

Giro de 270°

Giro de 360°

Un giro de 360° vuelve a la posición inicial y se empieza a contar de nuevo desde cero.

Por ejemplo, un giro de 450° es un giro de $360^{\circ} + 90^{\circ}$.

Luego, la posición de la aguja después de realizar un giro de 450° , es la misma posición que corresponde a un giro de 90° .

En nuestro problema, los giros son de 270° y 120° .

Pero,

$$270^{\circ} + 120^{\circ} = 390^{\circ} = 360^{\circ} + 30^{\circ}.$$

Por lo dicho arriba, la aguja, después de realizar estos giros, está en la posición de 30° . O sea, la tercera parte de un giro de 90° . Luego, la respuesta correcta es D.

Para practicar un poco más, dibuja los siguientes giros:

- (1) Giro de 45° (Indicación: es la mitad de un giro de 90°)
- (2) Giro de 60° (Indicación: es el doble de un giro de 30°)
- (3) Giro de 120° (Indicación: $120^{\circ} = 90^{\circ} + 30^{\circ}$)
- (4) Giro de 135° (Indicación: $135^{\circ} = 90^{\circ} + 45^{\circ}$).

EXAMEN 6

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. El 18 de septiembre de un cierto año cayó en día martes. ¿Qué día de ese mes fue el 8 de septiembre?

- A. martes
- B. jueves
- C. domingo
- D. lunes
- E. ninguna de las anteriores.

2. ¿Cuál de los siguientes es el mayor número menor que la mitad de 12?

- A. 11
- B. 7
- C. 6
- D. 5
- E. 4

3. ¿Cuántos minutos hay en un día?

- A. 720
- B. 7200
- C. 3600
- D. 60
- E. 1440

4. El primer término de la sucesión 1, 1, 2, 4, 8, es 1, el segundo término también es 1, y cada otro término se obtiene sumando todos sus términos anteriores. ¿Cuál es el décimo segundo término?

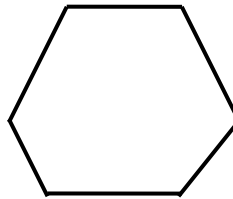
- A. 1024
- B. 512
- C. 256
- D. 128
- E. 64

5. ¿Cuál es la suma de todos los divisores de 12?

- A. 12
- B. 15
- C. 24
- D. 28
- E. 27

6. ¿Cuántas diagonales tiene el hexágono de la figura?

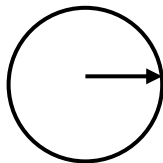
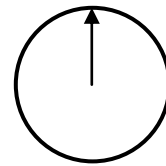
- A. 4
- B. 6
- C. 7
- D. 9
- E. 12



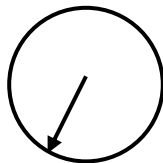
7. La avenida Altamira es perpendicular a la avenida Bolívar. La avenida Campo Santo es perpendicular a la avenida Durango y la avenida Campo Santo es paralela a la avenida Altamira. Entonces, es verdad que:

- A. la avenida Bolívar es perpendicular a la avenida Durango
- B. la avenida Altamira es paralela a la avenida Durango
- C. las avenidas Bolívar y Campo Santo son paralelas
- D. las avenidas Altamira y Campo Santo son perpendiculares
- E. la avenida Bolívar es paralela a la avenida Durango.

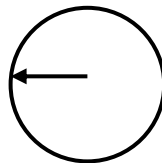
8. La flecha de la circunferencia de la figura realiza tres giros consecutivos de 270° , 180° y 120° , todos ellos en el sentido de las agujas del reloj. ¿Cuál de las siguientes es la posición de la flecha después de realizar estos giros?



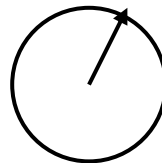
A.



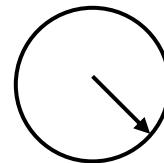
B.



C.



D.



E.

HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

--

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 6

1. Similar al problema resuelto 1 de esta Lección.
2. Similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.
3. Un día tiene 24 horas y una hora tiene 60 minutos.
4. Similar al problema resuelto número 2 de la Lección 5.
5. La solución la puedes obtener leyendo la solución del problema resuelto 4 de esta Lección.
6. Similar al problema resuelto número 3 de la Lección 3.
7. Similar al problema resuelto número 3 de esta Lección.
8. Similar al problema resuelto 5 de esta Lección.

LECCIÓN 7

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. 4 personas llegan a una fiesta y se saludan entre sí mediante un abrazo. ¿Cuál es el número total de abrazos?

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 10
- E. 12

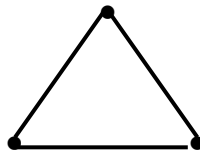
Solución. Representemos las personas por puntos y representemos un abrazo entre dos personas por el trazo que une los dos puntos.

Por ejemplo, si hay solo dos personas, el dibujo será:



Así, si hay 2 personas en la fiesta, habrá solo un abrazo, que está representado por el trazo que une estos dos puntos.

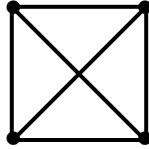
Supongamos ahora que en la fiesta hay tres personas. Entonces, el correspondiente dibujo es:



En este caso hay tres abrazos, que están representados por los tres lados del triángulo.

Supongamos finalmente que hay cuatro personas en la fiesta.

Entonces, el correspondiente dibujo es:



En este caso hay 6 abrazos, representados por los lados del cuadrado junto a sus diagonales. Luego, la respuesta correcta es B.

Comentario. Aprovecha la oportunidad y cuenta el correspondiente número de abrazos si en la fiesta hay 5 personas.

Te tienen que resultar 10 abrazos.

Ahora, descubre cuál será el número de abrazos si en la fiesta hay 6 personas. En general, el número de abrazos es el número de lados más el número de diagonales del polígono que se forma.

Problema 2. ¿Cómo se lee el número 0,010023?

- A. mil veintitrés milésimos.
- B. diez mil veintitrés millonésimos.
- C. diez mil veintitrés cien milésimos.
- D. mil veintitrés millonésimos.
- E. diez mil veintitrés diez milésimos.

Solución. Recuerda que si hay un solo decimal, este indica los décimos.

**--

Por ejemplo: 0,6 se lee seis décimos.

Cuando hay dos decimales, estos indican los centésimos (o céntimos).

Por ejemplo, 0,31 se lee treinta y uno centésimos, y 0,08 se lee ocho centésimos.

Si hay tres decimales, estos indican los milésimos.

Por ejemplo, 0,395 se lee trescientos noventa y cinco milésimos, mientras que 0,025 se lee veinticinco milésimos, y 0,002 se lee dos milésimos.

Cuando hay cuatro decimales, estos indican los diez milésimos. Por ejemplo, 0,0204 se lee doscientos cuatro diez milésimos.

Cuando hay cinco decimales, estos indican los cien milésimos. Por ejemplo, 0,00038 se lee treinta y ocho cien milésimos.

Por último, cuando hay seis decimales, como es el caso del problema, estos indican los millonésimos.

Así, 0,010023 se lee diez mil veintitrés millonésimos.

Luego la respuesta correcta es B.

Comentario. Para que practiques un poco más la lectura de decimales, lee los siguientes:

- (1) 0,0075
- (2) 200,01
- (3) 0,032
- (4) 256,745
- (5) 0,38546
- (6) 7805,000003.

Las respuestas a estos seis ejercicios son:

- (1) setenta y cinco diez milésimos.
- (2) doscientos enteros con un décimo.
- (3) treinta y dos milésimos.
- (4) doscientos cincuenta y seis enteros con setecientos cuarenta y cinco milésimos.
- (5) treinta y ocho mil quinientos cuarenta y seis cien milésimos.
- (6) siete mil ochocientos cinco enteros con tres millonésimos.

Vamos a aprovechar la oportunidad para hacer notar que, 0,2 (es decir, 2 décimos), también se escribe como 0,20 y se lee 20 centésimos (o 20 céntimos).

Otros ejemplos son:

0,17 también se escribe como 0,170 y se lee 170 milésimos.

0,17 también se escribe como 0,1700 y se lee 1.700 diez milésimos.

0,17 también se escribe como 0,17000 y se lee 17.000 cien milésimos.

Y en general, 0,17 también se escribe poniendo cualquier cantidad de ceros a la derecha del 7.

Por ejemplo, $0,17 = 0,170 = 0,1700 = \dots$

Pero, ¡cuidado!: 0,17 no es lo mismo que 0,107, ó que 0,017.

Los ceros que se agregan sin cambiar el valor de un decimal, son los ceros que se agregan a la derecha de la última cifra no cero (de la derecha).

En el caso del ejemplo 0,17 son los ceros que se agregan hacia la derecha, después del 7.

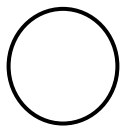
Para practicar un poco más sobre esto, responde si ó no, a las siguientes preguntas:

¿Es 0,056 igual a 0,05600? Respuesta: Si.

¿Es 0,1 igual a 0,01? Respuesta: No.

¿Es 0,38 igual a 0,380? Respuesta: Si.

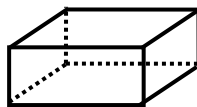
Problema 3. ¿Cuál de los siguientes es un cuadrilátero?



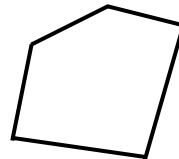
A.



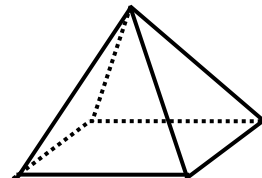
B.



C.



D.



E.

Solución. Este problema es similar al problema resuelto número 2 de la Lección 4.

Antes de resolver el problema, vamos a distinguir entre una figura plana y un cuerpo.

Una figura plana tiene dos dimensiones: largo y ancho.

Un cuerpo tiene tres dimensiones: largo, ancho y profundidad.

Los dibujos en A, B y D son figuras planas, llamadas respectivamente circunferencia, rectángulo y pentágono (penta = cinco, gono = ángulos).

Los dibujos en C y E no son figuras planas. Son cuerpos, llamados prisma recto (o paralelepípedo) y pirámide, respectivamente.

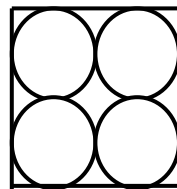
Un cuadrilátero es una figura plana. Es un polígono de cuatro lados (cuadri = cuatro, látero = lado).

Luego, un rectángulo es un cuadrilátero.

Así, la respuesta correcta es B.

Problema 4. El radio de cada circunferencia de la figura mide 2 cm.
¿Cuál es el perímetro del cuadrado circunscrito?

- A. 32 cm
- B. 24 cm
- C. 16 cm
- D. 12 cm
- E. 8 cm

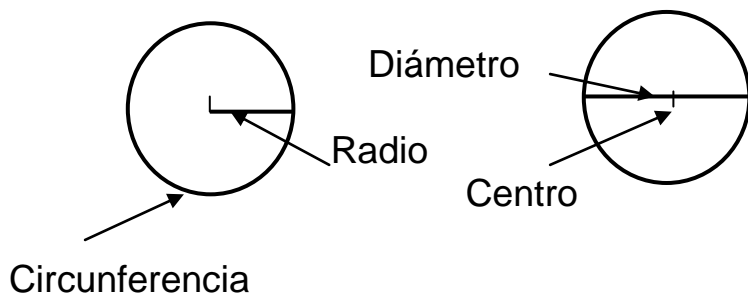


Solución. Antes de resolver el problema, recordemos que radio de una circunferencia es todo trazo que une el centro de la circunferencia con cualesquiera de sus puntos (los de la periferia).

Como cada uno de estos trazos tienen igual longitud, diremos el radio de la circunferencia, en lugar de decir un radio de la circunferencia.

Diámetro de la circunferencia es un trazo que une dos puntos de la circunferencia y que además pasa por el centro de ella.

Como cada uno de estos diámetros tiene la misma longitud, que a su vez es igual a dos veces la longitud del radio, diremos el diámetro, en lugar de decir un diámetro de la circunferencia.



Volviendo ahora al problema que estamos resolviendo, debemos observar que la longitud del lado del cuadrado es dos veces el diámetro de cada circunferencia.

Es decir, el lado del cuadrado es cuatro veces el radio de cada circunferencia.

Luego, el lado del cuadrado mide 8 cm.

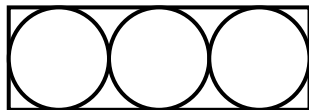
Por lo tanto, el perímetro del cuadrado (que por definición es igual a la suma de sus 4 lados) es entonces, $4 \times 8 = 32$ cm.

La respuesta correcta es A.

Para trabajar un poco más con estos perímetros (que para el caso del perímetro de un triángulo, perímetro de un cuadrado o perímetro de un rectángulo se definen, en cada caso, como la suma de todos sus lados), resuelve los siguientes problemas:

- (1) Si el perímetro de un cuadrado mide 12 cm, ¿cuánto mide su lado?

- (2) El lado de un ring cuadrado mide 8 metros y está rodeado por 3 corridas de cuerdas. ¿Cuántos metros de cuerda se usó?
- (3) El radio de cada una de las tres circunferencias de la figura de abajo mide 3 cm. ¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo? Entre paréntesis, este rectángulo se llama circunscrito a las tres circunferencias.



- (4) Recordemos que un triángulo equilátero es uno que tiene sus 3 lados iguales entre sí. Suponer ahora que el perímetro de un triángulo equilátero es igual al perímetro de un cuadrado, ¿es verdad que el lado del cuadrado es menor que el lado de este triángulo equilátero?

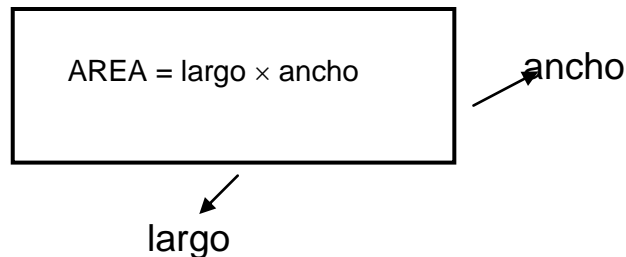
Las respuestas a estos problemas son:

- (1) 3 cm (ya que para obtener la longitud del lado se debe dividir por 4 el perímetro).
- (2) 96 metros. (ya que se debe multiplicar por 3 el perímetro del ring).
- (3) 48 cm
- (4) Si. (ya que el lado del triángulo es la tercera parte del perímetro, mientras que el lado del cuadrado es la cuarta parte del mismo perímetro, y la cuarta parte de un número positivo es más pequeña que la tercera parte del mismo número).

<p>Problema 5. El perímetro de un rectángulo es 18 cm. Si su ancho es 3 cm, ¿cuál es su área?</p>

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| A. 27 cm ² | D. 3 cm ² |
| B. 18 cm ² | E. 9 cm ² |
| C. 54 cm ² | |

Solución. Recordemos que el área de un rectángulo es el producto de (la longitud de) su largo por (la longitud de) su ancho.



Luego, para conocer el área de un rectángulo, debemos conocer su largo y su ancho.

Conocemos que el ancho del rectángulo es 3 cm, pero no conocemos su largo.

El problema se reduce entonces a determinar el largo del rectángulo.

Esto debe hacerse relacionando adecuadamente los datos que están en el enunciado del problema.

Recordemos que el perímetro de un rectángulo es la suma de las longitudes de todos sus lados. Es decir, el perímetro de un rectángulo es dos veces la suma del largo con dos veces la suma del ancho.



$$\begin{aligned}\text{Perímetro} &= (\text{largo} + \text{ancho} + \text{largo} + \text{ancho}) \\ &= 2 \times \text{largo} + 2 \times \text{ancho} \\ &= 2(\text{largo} + \text{ancho}).\end{aligned}$$

Como el perímetro del rectángulo es 18 cm, entonces la suma del largo con el ancho es 9 cm. Como el ancho es 3 cm, entonces el largo es 6 cm.

Luego, su área es: $\text{largo} \times \text{ancho} = 6 \times 3 = 18 \text{ cm}^2$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es B.

Comentario. En la solución de este problema, está implícito un argumento matemático que necesita practicarse un poco más.

Por lo tanto, es aconsejable que el estudiante resuelva ahora los siguientes problemas:

- (1) El perímetro de un rectángulo es 24 cm y su largo es 8 cm. ¿Cuál es su ancho?
- (2) El perímetro de un cuadrado es 32 m. ¿Cuál es la longitud de su lado?
- (3) El perímetro de un rectángulo es 22 cm y su largo es 7 cm. ¿Cuál es su área?
- (4) El perímetro de un cuadrado es 16 cm. ¿Cuál es su área?

Las respuestas a estos cuatro problemas son:

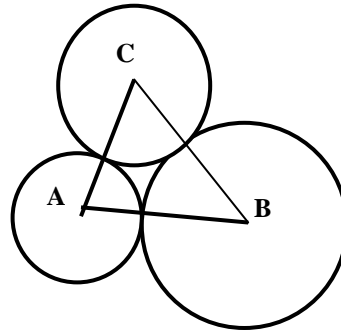
- (1) 4 cm
- (2) 8 m
- (3) 28 cm^2
- (4) 16 cm^2

EXAMEN 7

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. Las circunferencias de centros A, B y C de la figura tienen radios 2 cm, 3 cm y 4 cm, respectivamente. ¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?

- A. 9 cm
- B. 15 cm
- C. 24 cm
- D. 18 cm
- E. 21 cm



2. Si José Manuel tuviera Bs. 2500 menos de los que tiene, tendría Bs. 8300. ¿Cuánto dinero tiene José Manuel?

- A. Bs. 10800
- B. Bs. 6800
- C. Bs. 5800
- D. Bs. 7800
- E. Bs. 11800

3. La edad de Liliana es el doble de la de su hijo Felipe. En 4 años más, el hijo tendrá 28 años. ¿Cuál es la edad de la madre?

- A. 56
- B. 52
- C. 28
- D. 24
- E. 48

4. ¿Cómo se lee el número 0,00305?

- A. trescientos cinco milésimos.
- B. trescientos cinco centésimos.
- C. trescientos cinco décimos.
- D. trescientos cinco diez milésimos.
- E. ninguna de las anteriores.

5. En un campeonato de Béisbol se inscribieron 6 equipos. Si cada equipo debe jugar una sola vez con cada uno de los equipos restantes, ¿cuántos partidos tiene el campeonato?

- A. 12
- B. 13
- C. 14
- D. 15
- E. ninguna de las anteriores.

6. ¿Cuántos cortes deben realizarse en el tronco de la figura para dividirlo en 10 partes iguales?



- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11
- E. 12

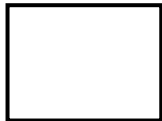
7. El perímetro de un cuadrado es 36 m. ¿Cuál es su área?

- A. 81 m^2 .
- B. 144 m^2 .
- C. 9 m^2 .
- D. 18 m^2 .
- E. 36 m^2 .

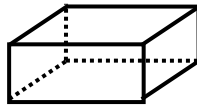
8. Los siguientes son cuadriláteros, EXCEPTO:



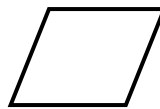
A.



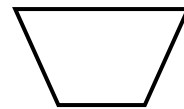
B.



C.



D.



E.

HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

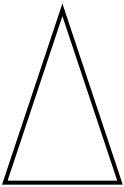
INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 7

1. Similar al problema resuelto número 4 de esta Lección.
2. Observa primero que debe tener más que Bs. 8300.
3. Similar al problema resuelto 4 de la Lección 3.
4. Similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.
5. Similar al problema resuelto 1 de esta Lección.
6. Se pregunta por el número de cortes, no por el número de partes. Antes de responder, dibuja los cortes. Lee también el problema resuelto 5 de la Lección 3.
7. Similar al problema resuelto número 5 de esta Lección.
8. Lee el problema resuelto 3 de esta Lección. Este problema pregunta: ¿cuál de los siguientes no es un cuadrilátero?

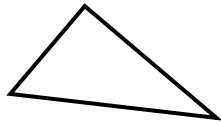
LECCIÓN 8

5 PROBLEMAS RESUELTOS

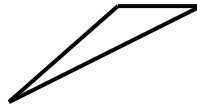
Problema 1. ¿Cuál de los siguientes es un triángulo rectángulo?



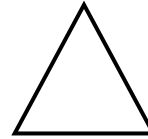
A.



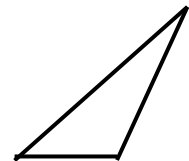
B.



C.



D.



E.

Solución. Este ejercicio es para recordar los diversos tipos de triángulos que debemos conocer. Observemos primero que todas las figuras de arriba son triángulos.

Recordemos que un triángulo se llama isósceles si tiene dos de sus lados iguales entre sí.

Por ejemplo, el triángulo en A es un triángulo isósceles.

Recordemos ahora que un triángulo es equilátero si sus tres lados son iguales entre sí.

Por ejemplo, el triángulo en D es equilátero.

Un triángulo es escaleno si todos sus lados son distintos entre sí.

Por ejemplo, los triángulos en B, en C y en E son escalenos.

Un triángulo se llama rectángulo si tiene dos lados perpendiculares entre sí; es decir, si tiene dos lados que se cortan formando un ángulo recto (ángulo de 90°).

Por ejemplo, en el cuadrado de la figura, el triángulo sombreado es rectángulo y al mismo tiempo es isósceles ya que los lados que

forman el ángulo recto son iguales entre sí pues en un cuadrado todos los lados son iguales entre sí.



Este lado es perpendicular con este otro lado

ya que estos dos lados se juntan formando un ángulo recto (es decir, un ángulo de 90°).

Una escuadra tiene la forma de un triángulo rectángulo y la escuadra sirve entonces para detectar triángulos rectángulos.

El único triángulo en las respuestas dadas que tiene forma de escuadra es el triángulo en B.

Luego, la respuesta correcta es B.

Problema 2. Un obrero pinta una muralla en 6 días. ¿En cuántos días pintan la misma muralla dos obreros (igualmente calificados como el anterior) que trabajan juntos?

- | | |
|-------|------|
| A. 3 | D. 6 |
| B. 4 | E. 8 |
| C. 12 | |

Solución. Observemos primero que mientras más obreros igualmente calificados hay, menos tiempo tomarán en terminar el mismo trabajo.

Luego, las únicas respuestas posibles son A. y B.

El problema es determinar ahora cuánto menos tiempo emplearán los dos obreros para terminar el trabajo.

Dibujemos la muralla:



Como un obrero toma 6 días para pintar la muralla, entonces en 1 día pinta $\frac{1}{6}$ de la muralla, como lo indica la parte sombreada de la siguiente figura:



Luego, si los dos obreros trabajan juntos, ellos pintan en un solo día $\frac{2}{6}$ de la muralla, como lo indica la siguiente figura:



De la propia figura anterior, se deduce que los dos obreros, trabajando juntos, se demorarán 3 días en terminar el trabajo (ya que 3 veces la parte sombreada cubre la muralla completa).

Luego, la respuesta correcta es A.

El raciocinio formal, es el siguiente:

Representamos por 1 el trabajo completo.

Como un obrero toma 6 días en terminar el trabajo, entonces en 1 día, realiza la sexta parte del trabajo.

Es decir, realiza $\frac{1}{6}$ del trabajo.

Si trabajan los 2 obreros juntos, ellos, en 1 día, realizan $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ del trabajo total.

Como $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2+2+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$, y recordando que 1 representa el trabajo completo, entonces los 2 obreros demoran 3 días en completarlo.

Para practicar más este tipo de ejercicios, resuelve los siguientes problemas:

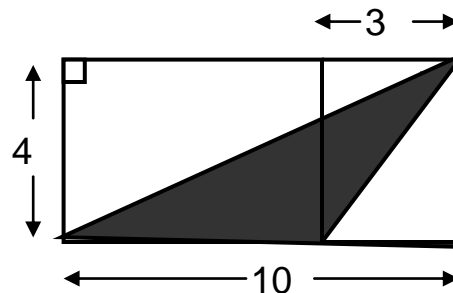
- (6) En el mismo problema anterior, ¿qué parte del trabajo realizan los 2 obreros juntos en 2 días?
- (7) Dos obreros terminan un trabajo en 12 días. ¿Cuánto le tomará realizar el mismo trabajo a 4 obreros tan eficientes como los anteriores?
- (8) Si voy a 60 km por hora, me demoro 6 horas para llegar a la playa. ¿Cuánto me demoro si voy a 90 km por hora?

Las respuestas son:

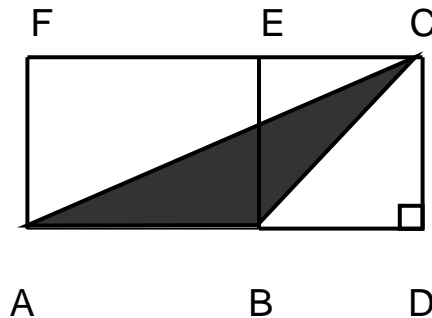
- (6) $\frac{4}{6}$ del trabajo (más adelante, después de estudiar simplificación de una fracción en el problema resuelto 2 de la Lección 9, esta fracción se escribirá como $\frac{2}{3}$).
- (7) 6 días
- (8) 4 horas (observa primero que si aumentas la velocidad te debes demorar menos)

Problema 3. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

- A. 40
- B. 20
- C. 28
- D. 14
- E. 18



Solución. El triángulo sombreado está representado también en la figura de abajo con sus correspondientes letras en los vértices. Tiene base AB y altura CD. Nota que en este caso, la altura bajada desde el vértice C del triángulo, a su base AB, cae fuera del lado AB (cae en la prolongación del lado AB).



Recuerda que la altura y la base (o la prolongación de la base), son perpendiculares entre sí; es decir, forman un ángulo de 90° .

Recordemos además, que:

“el área de un triángulo es la mitad del producto de la (longitud de la) base por la (longitud de la) altura correspondiente”.

En nuestro caso, tenemos:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times AB \times CD.$$

Observa que $BD = EC$. Pero, $EC = 3$ como lo indica la figura del enunciado. Luego $BD = 3$.

Como $AD = 10$, y como $AB = AD - BD$, entonces $AB = 10 - 3 = 7$.

Así, la base AB del triángulo es 7. Observa ahora que $CD = AF = 4$.

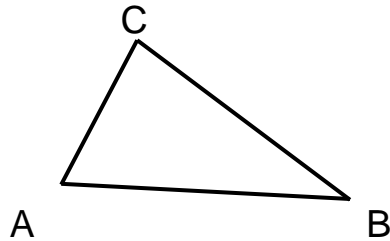
Así, la altura CD (correspondiente a la base AB del triángulo) es 4.

Luego, el producto de la base por la correspondiente altura es $7 \times 4 = 28$. La mitad de este producto es 14.

Por lo tanto, el área del triángulo es 14. La respuesta correcta es D.

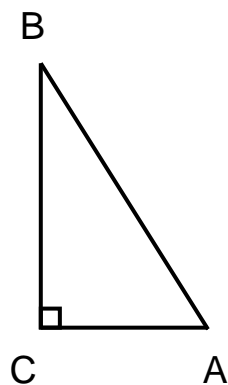
Comentario. Para practicar más este tipo de ejercicios, vamos a resolver los siguientes tres problemas:

1. El triángulo ABC de la figura es rectángulo en C (es decir, $\angle ACB = 90^\circ$, dicho también: ángulo en C = 90°). Si $AC = 4$ cm y $BC = 6$ cm, ¿cuál es su área?



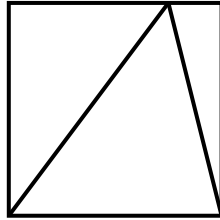
Observa que AC puede considerarse como base del triángulo. Como el triángulo es rectángulo en C, entonces el ángulo en C mide 90° y así, BC es la altura correspondiente a la base AC.

Para ver esto mejor, gira el triángulo ABC hasta dejarlo en la posición de la figura de abajo. Ahora se ve claro que AC es base y BC es la altura correspondiente a esta base AC.

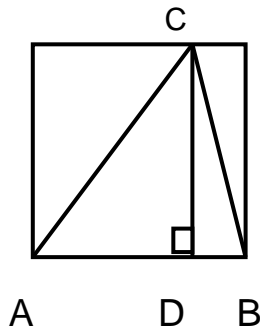


Como el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura, entonces el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ cm².

2. El área del cuadrado de la figura es 36 cm^2 . ¿Cuál es el área del triángulo?



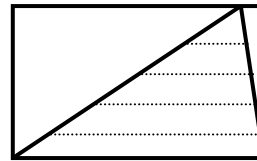
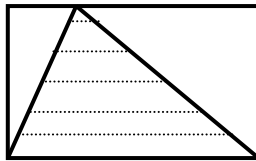
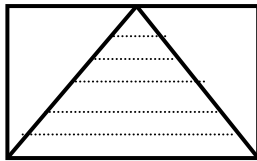
Para resolver este problema debemos darnos cuenta que tanto la base AB del triángulo, como la altura CD , son iguales en longitud, y ambas son respectivamente iguales al lado del cuadrado.



Como el área del cuadrado es 36 cm^2 , entonces el lado del cuadrado mide 6 cm (pues $6 \times 6 = 36$).

Luego, el área del triángulo es $\frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18 \text{ cm}^2$.

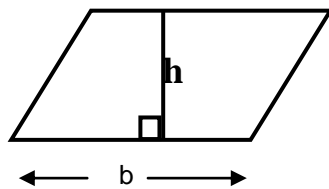
3. Los tres rectángulos de la figura de abajo tienen el mismo largo y el mismo ancho. ¿Cuál de los tres triángulos rayados tiene mayor área?



Observa que la altura de cada triángulo es igual al ancho de cada rectángulo. Es decir, la altura de cada triángulo es la misma en

longitud para cada uno de estos 3 triángulos. La correspondiente base de cada triángulo es igual al largo de cada rectángulo. Como el largo de cada rectángulo es el mismo, entonces la base de cada triángulo es la misma en longitud. Luego, los tres triángulos tienen la misma área.

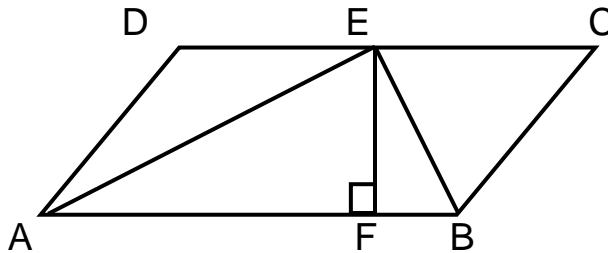
Aprovechemos la oportunidad para recordar que el área de un paralelogramo (cuadrilátero de lados opuestos paralelos), es el producto de la base por la altura.



$$A = b \times h$$

El área A del paralelogramo de la figura es $b \times h$.

Observa, por ejemplo que el área del triángulo ABE de la figura de abajo, es la mitad del área del paralelogramo $ABCD$. Esto es así porque, tanto el triángulo como el paralelogramo tienen la misma base AB y la misma altura EF . Como el área del triángulo es la mitad de la base por la altura y la del paralelogramo es la base por la altura, entonces el área del triángulo en cuestión es la mitad del área del paralelogramo $ABCD$.



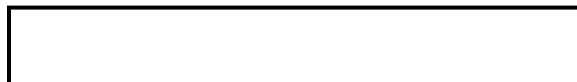
Problema 4. A una fiesta asistieron $\frac{3}{5}$ de los invitados. Si habían 60 personas en la fiesta, ¿cuántos invitados no asistieron a la fiesta?

- A. 36
- B. 100
- C. 40

- D. 20
- E. 24

Solución. Las 60 personas que están en la fiesta, corresponden a $\frac{3}{5}$ de los invitados. Luego, $\frac{1}{5}$ de los invitados corresponden a la tercera parte de 60. En consecuencia, $\frac{1}{5}$ de los invitados corresponden a 20 personas. Como a la fiesta asistieron $\frac{3}{5}$ de los invitados, entonces $\frac{2}{5}$ de los invitados no asistieron a la fiesta. Pero, $\frac{2}{5}$ de los invitados corresponden a 40 personas (pues, como ya vimos arriba, $\frac{1}{5}$ de los invitados son 20 personas). Luego, no asistieron a la fiesta 40 invitados. La respuesta correcta es C.

Comentario. Con un buen dibujo, todo es más fácil visualizar. Para ello, representemos a todos los invitados, por el rectángulo de la siguiente figura:



Como estamos hablando de quintos, dividimos el rectángulo en 5 partes iguales:



Tres quintas partes del rectángulo (que es la parte no sombreada) son 60 personas.

Luego, del propio dibujo, se deduce que cada quinta parte del rectángulo corresponde a 20 personas. Los dos quintos de las personas que faltaron a la fiesta (que es la parte sombreada del rectángulo), corresponden entonces a: $20 + 20 = 40$ personas.

Mirando el dibujo, el lector puede responder ahora a la siguiente pregunta:

¿cuántas personas fueron invitadas a la fiesta?

Respuesta: 100 personas.

Haciendo un dibujo similar a como lo hicimos arriba, resuelve ahora, los siguientes problemas:

- (1) En la clase hay 36 estudiantes y $\frac{3}{4}$ son varones. ¿Cuántos varones hay en la clase?
- (2) En la clase hay 24 estudiantes y $\frac{2}{3}$ son varones. ¿Cuántas niñas hay en la clase?
- (3) En una caja hay 24 lápices de colores. Si $\frac{3}{8}$ de ellos son negros, ¿cuántos lápices de otros colores hay en la caja?
- (4) En un examen de matemática, $\frac{4}{5}$ de los estudiantes lo aprobaron y solo 3 estudiantes lo reprobaron. ¿Cuántos estudiantes tomaron el examen?

Las respuestas son:

- (1) 27
- (2) 8
- (3) 15
- (4) 15

Problema 5. ¿Cuál de los siguientes es el mayor número entero que se debe agregar a 31 para obtener un múltiplo de 5?

- | | |
|-------|-------|
| A. 4 | D. 10 |
| B. 14 | E. 9 |
| C. 25 | |

Solución. Los múltiplos de 5 son:

5×1	5×6
5×2	5×7
5×3	5×8
5×4	5×9
5×5	$5 \times 10, \dots$

y así sucesivamente.

Es decir, los múltiplos de 5 son:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ... y así sucesivamente.

Son infinitos en número y cada uno se obtiene del anterior sumando 5.

Por ejemplo, el múltiplo de 5 que sigue a 50 es $50 + 5 = 55$, y el múltiplo de 5 que sigue a 55 es $55 + 5 = 60$.

Observemos ahora, que los números que debemos agregar a 31 para obtener múltiplos de 5, son:

4, 9, 14, 19, 24, ... y así sucesivamente.

Luego, dentro de las respuestas dadas, el 14 es el mayor de los enteros que se debe sumar a 31 para obtener un múltiplo de 5.

La respuesta correcta es B.

Comentario. La respuesta no es C ya que, aunque el número 25 es el mayor de todos los números que aparecen en las respuestas, tenemos que $31 + 25 = 56$, no es un múltiplo de 5.

Para practicar más acerca de los múltiplos, resuelve los siguientes problemas:

- (1) ¿Cuál es el menor entero que se debe agregar a 28 para obtener un múltiplo de 6?
- (2) ¿Cuál es el menor entero que se debe restar a 27 para obtener un múltiplo de 8?
- (3) ¿Cuáles son los múltiplos de 3 que están entre 10 y 20?
- (4) ¿Cuántos múltiplos de 4 hay entre 30 y 50?

Las respuestas son:

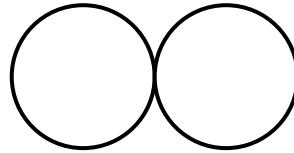
- (1) 2
- (2) 3
- (3) 12, 15 y 18.
- (4) Hay 5 múltiplos.

EXAMEN 8

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. El radio de cada circunferencia de la figura mide 6 cm. ¿Cuál es, en cm^2 , el área del rectángulo circunscrito a ellas?

- A. 36 cm^2
- B. 144 cm^2
- C. 72 cm^2
- D. 48 cm^2
- E. Ninguna de las anteriores.



2. En la clase hay 48 estudiantes y $\frac{1}{3}$ de ellos son varones. ¿Cuántas niñas hay en la clase?

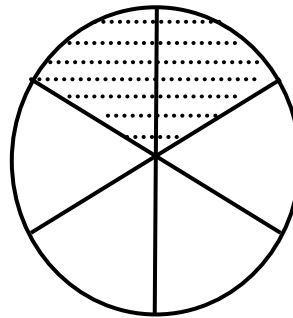
- A. 16
- B. 18
- C. 24
- D. 36
- E. 32

3. Un grifo abierto llena una piscina en 12 horas. ¿En cuánto tiempo tres grifos abiertos, como el anterior, llenarán la piscina?

- A. 36 horas
- B. 24 horas
- C. 6 horas
- D. 4 horas
- E. 3 horas

4. ¿Qué fracción del círculo es la parte sombreada?

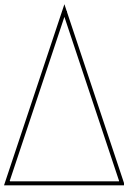
- A. $\frac{2}{6}$
- B. $\frac{1}{6}$
- C. $\frac{2}{3}$
- D. $\frac{2}{4}$
- E. $\frac{1}{4}$



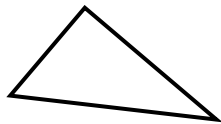
5. El perímetro de un cuadrado es 36 m. ¿Cuál es su área?

- A. 72 m^2
- B. 9 m^2
- C. 36 m^2
- D. 16 m^2
- E. ninguna de las anteriores.

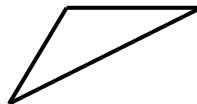
6. ¿Cuál de los siguientes es un triángulo isósceles?



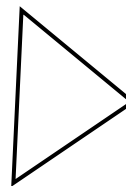
A.



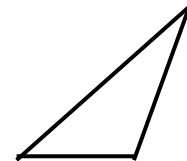
B.



C.



D.

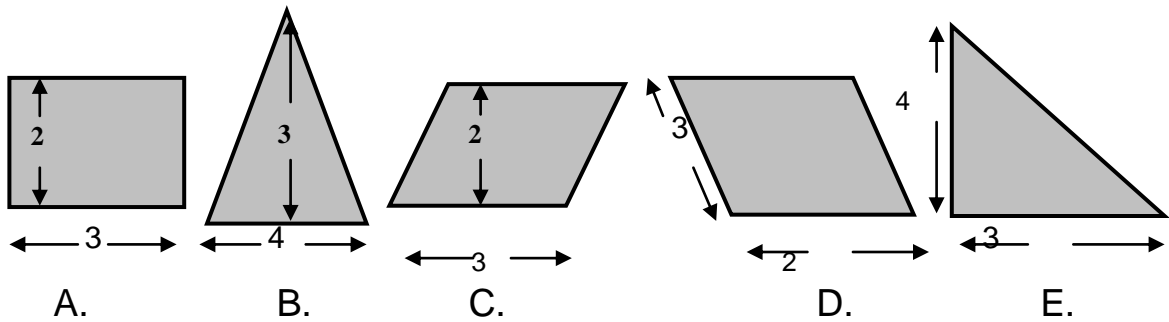


E.

7. ¿Cuál de los siguientes es el mayor número entero que debemos restar a 30 para obtener un múltiplo de 9?

- A. 3
- B. 5
- C. 6
- D. 12
- E. 15

8. Las siguientes figuras tienen la misma área, excepto:



HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 8.

1. Dibuja primero el rectángulo circunscrito. Aunque el problema resuelto número 4 de la Lección 7 es sobre perímetros, te ayuda mucho revisarlo ahora.
2. Similar al problema resuelto número 4 de esta Lección.
3. Similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.
4. Similar al problema resuelto número 5 de la Lección 1.
5. Similar al problema resuelto número 5 de la Lección 7.
6. Similar al problema resuelto número 1 de esta Lección.
7. Lee el problema resuelto número 5 de esta Lección.
8. Lee el problema resuelto número 3 de esta Lección.

LECCIÓN 9

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. El largo de un rectángulo mide 18 m y su ancho mide 12 m. ¿Cuál de las siguientes es la mayor longitud de una varilla que cabe exactamente tanto en el largo como en el ancho del rectángulo?

- A. 1 m
- B. 3 m
- C. 9 m

- D. 6 m
- E. 8 m

Solución. Como por lo menos una de las respuestas debe ser la verdadera, observamos, para comenzar, que la varilla que buscamos debe tener un número entero de metros.

Para que la varilla (con un número entero de metros) quepa exactamente en el largo del rectángulo, su longitud debe ser un divisor de 18.

Para que la varilla quepa exactamente en el ancho del rectángulo, su longitud debe ser un divisor de 12.

Para que la varilla quepa exactamente tanto en el largo como en el ancho del rectángulo, su longitud debe ser un divisor tanto de 18 como de 12.

Y la mayor longitud debe ser el mayor de los divisores comunes de 18 y de 12.

Los divisores de 18 son 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Luego, los divisores comunes de 18 y de 12 son: 1, 2, 3 y 6.

El mayor de estos, llamado máximo común divisor entre 18 y 12, abreviado $MCD(18, 12)$, es 6.

Luego, la respuesta correcta es D.

Comentario. Arriba hemos descubierto que $MCD(18, 12) = 6$.

Lo descubrimos haciendo la lista de los divisores comunes de 18 y 12.

Cuando los números son más grandes, hacer la lista de los divisores se dificulta bastante.

Recordemos entonces el método de Euclides para encontrar el MCD entre dos números.

Veámoslo a través de los números 54 y 30.

Para obtener $MCD(54, 30)$, se divide el mayor de estos dos números entre el menor de ellos.

Es decir, se divide 54 entre 30.

El cociente es 1 y el resto es 24.

Se divide ahora 30 (que es el menor de los números dados) entre este resto 24.

El cociente es 1 y el resto 6.

Se divide ahora el resto anterior 24 con este nuevo resto 6.

El cociente es 4 y el resto es cero.

El $MCD(54, 30)$ es el último resto no cero en este proceso.

Es decir, $MCD(54, 30)$ es 6. También escrito $MCD(54, 36) = 6$.

Veamos otro ejemplo: calcular $MCD(65, 160)$.

Dividimos 160 (que es el mayor) entre 65 (que es el menor).

El cociente es 2 y el resto es 30.

Dividimos ahora 65 (que es el menor de los números dados) entre este resto 30.

El cociente es 2 y el resto es 5.

Dividimos el resto anterior 30 entre este resto 5.

El cociente es 6 y el resto es 0.

El último resto no cero es 5. Así, $\text{MCD}(65, 160) = 5$

Practica este método ahora, calculando:

- (1) $\text{MCD}(60, 48)$
- (2) $\text{MCD}(128, 56)$
- (3) $\text{MCD}(380, 480)$.

Las respuestas son:

- (1) 12
- (2) 8
- (3) 20

Problema 2. Al simplificar la fracción $\frac{36}{48}$, esta se reduce a:

- | | |
|------------------|------------------|
| A. $\frac{2}{3}$ | D. $\frac{3}{4}$ |
| B. $\frac{1}{3}$ | E. $\frac{1}{2}$ |
| C. $\frac{1}{4}$ | |

Solución. Antes de resolver este problema te aconsejo que leas de nuevo el problema resuelto 4 de la Lección 6.

Recordemos ahora que simplificar una fracción, es sustituirla por una fracción equivalente (es decir, de igual valor que la anterior), dividiendo tanto el numerador de la fracción (que es la parte de arriba de la fracción) como el denominador de la fracción (que es la parte de abajo de la fracción), por un mismo número.

Por ejemplo, $\frac{4}{8}$ es una simplificación de la fracción $\frac{12}{24}$ ya que dividiendo tanto el numerador como el denominador de la fracción $\frac{12}{24}$ por el número 3, obtenemos $\frac{4}{8}$, pues $12:3 = 4$ y $24:3 = 8$.

Nota además, que $\frac{4}{8}$ es equivalente con (es decir, tiene el mismo valor que) $\frac{12}{24}$, ya que $\frac{4}{8}$ significa $4:8$, y $4:8 = 0,5$.

Similarmente, $\frac{12}{24}$ significa $12:24$, y $12:24 = 0,5$.

Luego, $\frac{12}{24}$ y $\frac{4}{8}$ son fracciones equivalentes porque tienen el mismo valor; a saber 0.5.

Observa ahora, que la fracción $\frac{4}{8}$ se puede seguir simplificando; esta vez, por 4 (es decir, se puede dividir tanto arriba como abajo por 4), resultando $\frac{1}{2}$, pues $4:4 = 1$ y $8:4 = 2$.

La fracción $\frac{1}{2}$ (que es equivalente con $\frac{12}{24}$ y $\frac{4}{8}$ ya que $\frac{1}{2}$ también tiene valor 0,5) está ahora en sus términos más simples; esto es, no puede seguir simplificándose.

Diremos, entonces, que la simplificación de la fracción $\frac{12}{24}$ es $\frac{1}{2}$.

En general, simplificar una fracción dada, quiere decir que la tenemos que escribir en forma equivalente, pero en sus términos más simples.

Para ello, vamos dividiendo arriba y abajo por los números primos

2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ,

y que al mismo tiempo sean divisores tanto del numerador como del denominador de la fracción dada.

En el caso del problema 3, la fracción $\frac{36}{48}$ se puede simplificar por 2 (es decir, se divide arriba y abajo por 2), resultando $\frac{18}{24}$.

$$\text{Luego, } \frac{36}{48} = \frac{18}{24}.$$

La fracción resultante $\frac{18}{24}$ puede, nuevamente, ser simplificada por 2, resultando $\frac{9}{12}$. Luego, tenemos que $\frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12}$.

Esta última fracción se puede, ahora, simplificar por 3.

Resulta:

$$\frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Como no hay divisores comunes a 3 y 4 (excepto el 1), la fracción $\frac{3}{4}$ está escrita en sus términos más simples y es equivalente con la fracción $\frac{36}{48}$ dada. Luego, la respuesta correcta es D.

Comentario. Una vía rápida de simplificar fracciones es calcular el MCD entre el numerador y el denominador de la fracción dada, y luego, dividir arriba y abajo por este MCD. Por ejemplo, en la misma fracción $\frac{36}{48}$ anterior, calculamos $\text{MCD}(36, 48)$ por el método de Euclides explicado en la solución del problema resuelto 1 anterior. Tenemos que $\text{MCD}(36, 48) = 12$. Luego, dividiendo arriba y abajo la fracción $\frac{36}{48}$ por 12, obtenemos la fracción $\frac{3}{4}$, que es la simplificación de $\frac{36}{48}$.

Veamos otro ejemplo. Simplifiquemos la fracción $\frac{30}{54}$.

El MCD(54, 30) lo calculamos por el método de Euclides explicado en la solución del problema resuelto 1 anterior.

Allí, vimos que $\text{MCD}(54, 30) = 6$.

Dividiendo ahora, en la fracción $\frac{30}{54}$, arriba y abajo por 6, resulta que

$\frac{30}{54} = \frac{5}{9}$, y esta última fracción está en sus términos más simples.

Tú debes, por este último método, simplificar las siguientes fracciones:

(1) $\frac{12}{16}$

(2) $\frac{18}{42}$

(3) $\frac{48}{60}$

(4) $\frac{45}{60}$

Las respuestas son:

(1) $\frac{3}{4}$

(2) $\frac{3}{7}$

(3) $\frac{4}{5}$

(4) $\frac{3}{4}$

Problema 3. En una sala de clases hay 25 estudiantes. Si el 60% de ellos son varones, ¿Cuántas niñas hay en la clase?

A. 10

D. 20

- B. 12
- C. 15

E. Ninguna de las anteriores.

Solución. El 60% de un número significa el $\frac{60}{100}$ del número.

Luego, el 60% de 25 significa el $\frac{60}{100}$ de 25.

Pero, el $\frac{60}{100}$ de 25 significa $\frac{60}{100} \times 25$.

Además, $\frac{60}{100} \times 25$ es igual a $\frac{60 \times 25}{100}$.

Pero, $60 \times 25 = 1.500$. Luego, $\frac{60 \times 25}{100} = \frac{1.500}{100} = 15$ (recuerda que para dividir 1.500 por 100 se corre el decimal desde la derecha de 1.500 hacia la izquierda, dos lugares, resultando 15).

Luego, el 60% de 25 es 15.

Como el 60% de los 25 estudiantes son varones, entonces hay 15 varones.

Cuidado ahora. La respuesta correcta no es C.

Se pregunta por el número de niñas y no por el número de varones que hay en la clase.

Hay $25 - 15 = 10$ niñas. La respuesta correcta es A.

Este tipo de problema debe practicarse lo más posible. Aquí van algunos problemas de práctica:

- (1) ¿Cuál es el 25 % de 80?
- (2) ¿Cuál es el 30% de 60?
- (3) ¿Cuánto es 120 menos el 30% de 120?

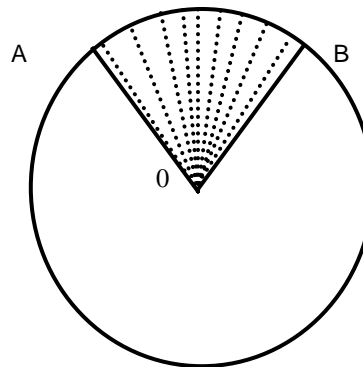
- (4) En una casa comercial toda la mercadería está con un 25 % de descuento. Si un artículo se vendía en Bs. 4800, ¿Cuánto vale ahora?

Las respuestas son:

- (1) 20 (pues $\frac{25 \times 80}{100} = 20$).
(2) 18
(3) 84
(4) Bs. 3600 (Nota: este problema es muy similar al anterior).

Problema 4. El ángulo del centro del sector sombreado mide 72° .
¿Qué porcentaje del círculo es este sector?

- A. 25 %
B. 20 %
C. 28 %
D. 40 %
E. 72 %



Solución. El ángulo del centro es el ángulo AOB, donde O es el centro de la circunferencia. Por otro lado, vamos recordando, por ejemplo, que 20% significa que de cada 100 se toman 20 partes. Es decir, 20% representa la fracción $\frac{20}{100}$. Pero, simplificada en sus términos más simples, $\frac{20}{100}$ es $\frac{1}{5}$. Luego, el 20% de un número corresponde a la quinta parte del número. Y al revés, la quinta parte de un número corresponde al 20% del número, ya que $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, fracción que corresponde al 20%. Este hecho lo expresamos como:

$$\frac{1}{5} \leftrightarrow 20\%,$$

donde el símbolo \leftrightarrow se lee “corresponde a”. Es decir, la quinta parte de un número corresponde al 20% del número y recíprocamente, el 20% de un número es la quinta parte del número.

En el caso del problema, la parte sombreada corresponde a $\frac{72}{360}$ del total del círculo, ya que el círculo completo corresponde a 360° . Pero, reducida a sus términos más simples, $\frac{72}{360}$ es $\frac{1}{5}$. Como acabamos de ver, $\frac{1}{5}$ corresponde al 20%. Luego, la respuesta correcta es B.

Comentario. Argumentando como al principio de la solución anterior, tienes ahora la sana tarea de comprobar la validez de la siguiente tabla:

$\frac{1}{2}$	\leftrightarrow	50%	(que se lee: $\frac{1}{2}$ corresponde al 50%)
$\frac{3}{4}$	\leftrightarrow	75%	(que se lee: $\frac{3}{4}$ corresponde al 75%)
$\frac{1}{5}$	\leftrightarrow	20%	(que se lee: $\frac{1}{5}$ corresponde al 20%)
$\frac{2}{5}$	\leftrightarrow	40%	(que se lee: $\frac{2}{5}$ corresponde al 40%)
$\frac{3}{5}$	\leftrightarrow	60%	(que se lee: $\frac{3}{5}$ corresponde al 60%)
$\frac{4}{5}$	\leftrightarrow	80%	(que se lee: $\frac{4}{5}$ corresponde al 80%)

$\frac{1}{10}$	\leftrightarrow	10%	(que se lee: $\frac{1}{10}$ corresponde al 10%)
$\frac{3}{10}$	\leftrightarrow	30%	(que se lee: $\frac{3}{10}$ corresponde al 30%)
$\frac{7}{10}$	\leftrightarrow	70%	(que se lee: $\frac{7}{10}$ corresponde al 70%)
$\frac{1}{3}$	\leftrightarrow	33,33%	(que se lee: $\frac{1}{3}$ corresponde al 33,33%)
$\frac{2}{3}$	\leftrightarrow	66,66%	(que se lee: $\frac{2}{3}$ corresponde al 66,66%)

Usemos ahora la tabla anterior para resolver el siguiente problema:

¿Qué porcentaje de 12 es 8?

Es $\frac{8}{12}$. Simplificando, resulta $\frac{3}{4}$.

Mirando la tabla anterior, vemos que $\frac{3}{4}$ corresponde al 75%.

Luego, tenemos que 8 es el 75% de 12.

Por este método, resuelve los siguientes ejercicios:

- (1) ¿Qué porcentaje de 15 es 5?
- (2) ¿Qué porcentaje de 18 es 3?
- (3) ¿Qué porcentaje de 30 es 18?
- (4) ¿Qué porcentaje de 50 es 25?
- (5) ¿Qué porcentaje de 25 es 2?

Las respuestas son:

- (1) 33,33%
- (2) 16,66%
- (3) 60%
- (4) 50%

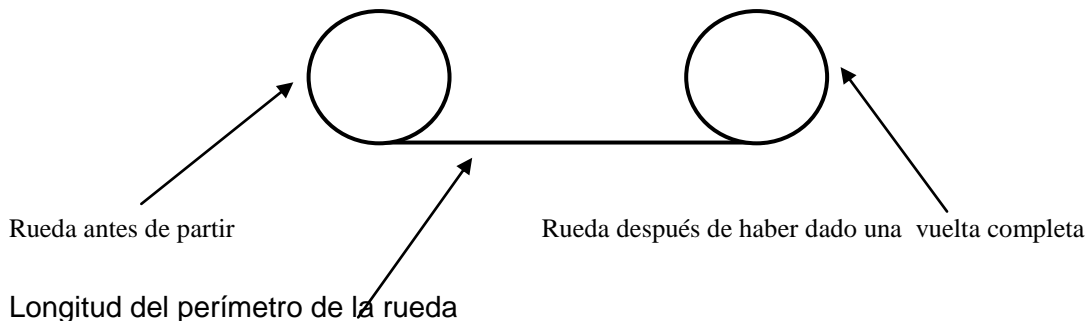
- (5) 8% (Indicación: este no está en la tabla. Amplifica $\frac{2}{25}$ por 4; es decir, multiplica el numerador y el denominador de la fracción $\frac{2}{25}$ por 4. Obtienes así la fracción equivalente $\frac{8}{100}$).

Problema 5. El diámetro de una rueda de bicicleta mide 0.8 m. Entonces, la distancia que esta rueda recorre después de girar 5 vueltas completas, es más cercano a:

- A. 13 m D. 4 m
B. 6 m E. 18 m
C. 24 m

Solución. Observemos que si la rueda de la bicicleta gira una vuelta completa, la distancia que ha recorrido en el suelo es precisamente la longitud de su contorno.

Es decir, corresponde al perímetro de la circunferencia de la rueda.

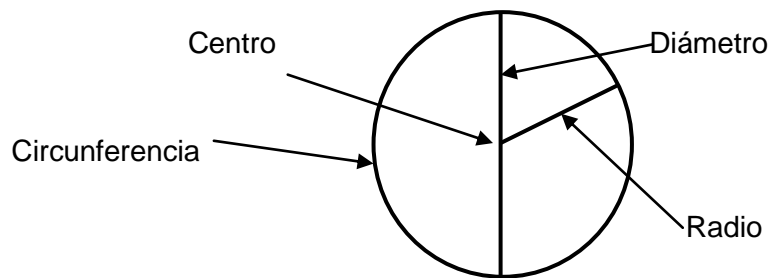


Después de dar o girar 5 vueltas, la distancia recorrida por la rueda es 5 veces el perímetro de la circunferencia.

Antes de recordar cuál es el perímetro de una circunferencia, recordemos primero que el radio de una circunferencia es la distancia desde el centro de la circunferencia hasta cualquier punto de la circunferencia.

El diámetro de una circunferencia es todo trazo que une dos puntos de la circunferencia y que además pasa por el centro de ella (estos puntos se llaman diametralmente opuestos).

Luego, la longitud del diámetro es dos veces la longitud del radio.



El diámetro cabe en la circunferencia 3,14 veces, aproximadamente.

Este número se denota por la letra griega π , que se lee “pi”.

Luego,

$$\pi = 3,14 \text{ aproximadamente.}$$

Por lo tanto,

el perímetro P de la circunferencia es el producto del diámetro por pi.

Es decir, es

$$D \times \pi,$$

donde D es (la longitud de) el diámetro de la circunferencia.

Así,

$$P = D \times \pi,$$

donde P es el perímetro de la circunferencia (y D es su diámetro).

Como (la longitud de) el diámetro D de la circunferencia es 2 veces (la longitud de) el radio R , entonces:

$$D = 2 \times R.$$

En consecuencia, también es verdad que:

$$P = 2 \times R \times \pi,$$

Lo cual también se escribe como

$$P = 2\pi R$$

Es decir, el perímetro de la circunferencia es el producto de dos veces el radio por π .

Luego,

$$P = 2\pi R$$

En el caso del problema 5, el diámetro D es 0,8 metros.

Como $\pi = 3,14$, aproximadamente, entonces el perímetro de la circunferencia de la rueda es $3,14 \times 0,8$ metros aproximadamente.

Como $3,14 \times 0,8 = 2,512$, entonces la rueda recorre 2,512 metros, aproximadamente, al dar una vuelta completa.

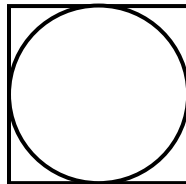
Al dar 5 vueltas completas, recorrerá $2,512 \times 5 = 12,560$ metros, aproximadamente.

Como este número es más cercano a 13 (entre las respuestas dadas), entonces la respuesta correcta es A.

Comentario. Para que practiquemos más con esto del perímetro de una circunferencia, resolvamos algunos problemas adicionales.

El primero es el siguiente:

“El perímetro del cuadrado de la figura de abajo es 24 cm. ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia?”



En este caso diremos que el cuadrado está circunscrito a la circunferencia.

Para resolver este problema debemos darnos cuenta primero que el lado del cuadrado es 6 cm.

(Esto se debe a que el perímetro del cuadrado es 4 veces el lado y el perímetro es 24, luego, el lado es $24:4 = 6$).

Por otra parte, debemos darnos cuenta, que el diámetro de la circunferencia es igual al lado del cuadrado.

Luego, el diámetro de la circunferencia es 6 cm.

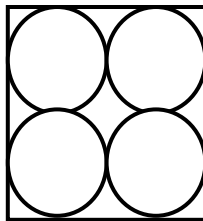
Como el perímetro de la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π , entonces el perímetro de la circunferencia es $6 \times \pi$.

$6 \times \pi$ también se escribe como 6π .

Luego, el perímetro de la circunferencia pedida es 6π .

Resolvamos ahora el siguiente problema:

“El área del cuadrado de la figura es 25 cm^2 . ¿Cuál es el perímetro de cada una de las circunferencias?”



Para resolver este problema, observemos que el lado del cuadrado es 5 cm, ya que su área es $25 = 5^2 = 5 \times 5$ (recuerda que el área de un cuadrado de lado a es $a^2 = a \times a$).

Luego, el diámetro de cada circunferencia es 2,5 cm.

Así, el perímetro de cada circunferencia es $2,5 \times \pi$.

Observemos que $2,5 \times \pi$ también se escribe como $2,5\pi$.

EXAMEN 9

Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. ¿Cuál es el máximo común divisor entre 120 y 100?

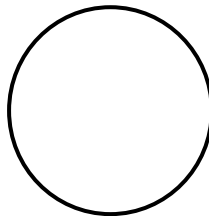
- | | | | |
|----|------|----|----|
| A. | 1200 | D. | 20 |
| B. | 600 | E. | 10 |
| C. | 60 | | |

2. En un salón de clases hay 28 estudiantes. Solo el 25% aprobó el examen de matemáticas. ¿Cuántos alumnos reprobaron el examen?

- A. 14
- B. 7
- C. 21
- D. 20
- E. 24

3. El perímetro de la circunferencia de la figura es 6π metros ¿Cuál es el área del cuadrado circunscrito, en metros cuadrados?

- A. 36π
- B. 9π
- C. 12
- D. 12π
- E. 36

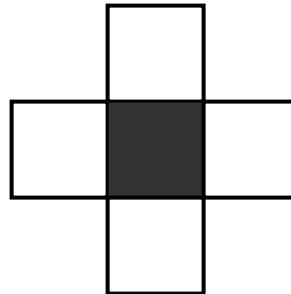


4. Después de simplificar la fracción $\frac{72}{90}$, se obtiene:

- A. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{6}$
B. $\frac{2}{3}$ E. $\frac{7}{12}$
C. $\frac{4}{5}$

5. ¿Qué fracción del total de la figura es la parte no sombreada?

- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{4}{5}$
E. $\frac{1}{6}$

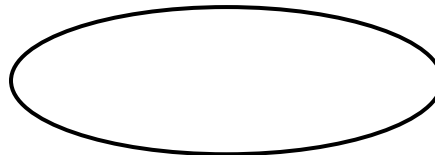


6. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado es $2^2 \times 3^2$?

- A. 6 D. 24
B. 36 E. 2
C. 8

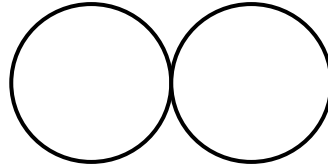
7. ¿Cuántos cortes deben efectuarse en la cuerda de la figura para dividirla en cuatro partes de igual longitud?

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6



8. El radio de cada circunferencia de la figura es 4 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo circunscrito a ellas?

- A. 48 cm
- B. 16 cm
- C. 12 cm
- D. 24 cm
- E. Ninguna de las anteriores.



HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

--

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 9

1. Lee el problema resuelto número 1 de esta Lección.
2. Similar al problema resuelto número 3 de esta Lección.
3. Lee la solución al problema resuelto 5 de esta Lección, especialmente después del comentario. Ahora dibuja el cuadrado circunscrito.
4. Similar al problema resuelto número 2 de esta Lección.
5. Similar al problema resuelto número 5 de la Lección 1.
6. $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$. Luego, la pregunta es: ¿cuál es el número cuyo cuadrado es 36?
7. Revisa el problema resuelto 5 de la Lección 3.
8. Similar al problema resuelto 4 de la Lección 7. Dibuja ahora el rectángulo circunscrito. El ancho del rectángulo es el diámetro de la circunferencia y el largo del rectángulo es el doble del diámetro de la circunferencia.

LECCIÓN 10

5 PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1. ¿Cuál es el menor número de personas con las cuales, usándolas todas, se pueden formar grupos (exactos) de 6 personas o grupos (exactos) de 8 personas?

- | | |
|-------|-------|
| A. 14 | D. 18 |
| B. 48 | E. 36 |
| C. 24 | |

Solución. Para formar grupos (exactos) de 6 personas, el número total de personas debe ser un múltiplo de 6. Para formar grupos (exactos) de 8 personas, el número total de personas debe ser un múltiplo de 8. El número pedido en el enunciado del problema es, entonces, el menor múltiplo común entre 6 y 8. Es decir, es el Mínimo Común Múltiplo (MCM) entre 6 y 8, que se escribe en forma abreviada como $MCM(6, 8)$.

Hagamos la lista de los múltiplos de 6 y hagamos la lista de los múltiplos de 8.

Tenemos:

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48,
8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,

Los múltiplos comunes de 6 y de 8 son: 24, 48,

El menor de todos ellos es el $MCM(6, 8)$. Luego, $MCM(6, 8) = 24$.

Luego, la respuesta correcta es C.

Comentario. Observa que en la respuesta B aparece 48, con los cuales también se pueden hacer grupos exactos de 6 personas o grupos exactos de 8 personas; pero, 48 no es el menor de los

números con los cuales se pueden hacer estos grupos, como se pide en el enunciado.

Observemos ahora que si los números son grandes, hacer la lista de múltiplos de cada uno de ellos se dificulta bastante.

Vamos entonces a revisar el método de la vía rápida para obtener el MCM entre dos o más números.

Revisemos dicho método a través de algunos ejemplos.

Consideremos los números 36 y 54.

Recuerda que para obtener el $MCM(36, 54)$, se van dividiendo sucesivamente los números 36 y 54 por todos los factores primos (de menor a mayor) que ellos tengan.

En la solución del problema resuelto 4 de la Lección 6, está la lista de todos los números primos menores que 100.

La vía rápida es hacer el siguiente cuadro:

36	54	2
18	27	2
9	27	3
3	9	3
1	3	3
1		

Este cuadro se lee así: La primera línea (la que contiene al 36, al 54 y al 2), dice que el número primo 2 es un divisor tanto de 36 como de 54.

En la segunda línea del cuadro ponemos sus cocientes 18 y 27.

Como 2 es un divisor de 18, ponemos 2 a la derecha en la segunda línea.

Dividimos 18 por 2. Resulta 9. Pero como 2 no es un divisor de 27, entonces 27 queda como está.

En la tercera línea quedan entonces, 9 y 27. Ninguno de ellos es divisible por 2. Pero, son divisibles por 3.

Ponemos el divisor 3 a la derecha y dividimos tanto 9 como 27 por 3. Los cocientes respectivos 3 y 9, se escriben en la línea 4 y se puede seguir dividiendo por 3, hasta obtener cocientes 1.

Para encontrar el MCM entre 36 y 54, se multiplican ahora todos los factores primos encontrados (2, 2, 3, 3, 3 que son los que aparecen en la columna 3 del cuadro anterior).

Es decir, efectuamos la multiplicación:

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3,$$

la cual es 108.

Este es el Mínimo Común Múltiplo entre 36 y 54.

Luego,

$$\text{MCM}(36, 54) = 108.$$

Para observar otro ejemplo, calculemos ahora el MCM entre los tres números: 300, 270 y 120.

Tenemos:

300	270	120	2
150	135	60	2
75	135	30	2
75	135	15	3
25	45	5	3
25	15	5	3
25	5	5	5
5	1	1	5
1			

Luego,

$$\text{MCM}(300, 270, 120) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 5400.$$

Calcula ahora, los siguientes MCM:

- (1) MCM(48, 36)
- (2) MCM(28, 36)
- (3) MCM(20, 24, 30)
- (4) MCM(12, 15, 20).

Las respuestas son:

- (1) 144
- (2) 252
- (3) 120

(4) 60.

Problema 2. Reinaldo pinta los $\frac{2}{9}$ de una muralla y su hijo Pepe pinta los $\frac{5}{12}$ siguientes. ¿Qué parte de la muralla han pintado hasta ahora?

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{23}{36}$
- C. $\frac{5}{18}$
- D. $\frac{2}{3}$
- E. $\frac{13}{36}$

Solución. Reinaldo y su hijo han pintado $\frac{2}{9} + \frac{5}{12}$ de la muralla.

Debemos entonces calcular la suma de estas dos fracciones.

Para sumar fracciones, se deben sustituir las fracciones que se van a sumar por fracciones equivalentes donde cada una de ellas tenga el mismo denominador (denominador de una fracción es el número que está abajo en la fracción). Por ejemplo, el denominador de $\frac{2}{9}$ es 9 y

el denominador de $\frac{5}{12}$ es 12.

El numerador de una fracción es el número de arriba de la fracción.

Por ejemplo, el numerador de $\frac{2}{9}$ es 2 y el numerador de $\frac{5}{12}$ es 5.

Recordemos ahora que una fracción se puede transformar en otra fracción equivalente (es decir, en una fracción de igual valor que la anterior), si la amplificamos; es decir, si multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número.

Por ejemplo, si multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{2}{9}$ por 2, se obtiene la fracción equivalente $\frac{4}{18}$.

Amplificando la fracción $\frac{2}{9}$ sucesivamente por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6,, se obtienen las siguientes fracciones equivalentes a $\frac{2}{9}$:

$$\frac{2}{9}, \frac{4}{18}, \frac{6}{27}, \frac{8}{36}, \frac{10}{45}, \frac{12}{54}, \dots$$

Observa que en los denominadores de las fracciones de la lista anterior aparecen los múltiplos de 9.

Amplificando la fracción $\frac{5}{12}$ sucesivamente por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6,, se obtienen las siguientes fracciones equivalentes a $\frac{5}{12}$:

$$\frac{5}{12}, \frac{10}{24}, \frac{15}{36}, \frac{20}{48}, \frac{25}{60}, \frac{30}{72}, \dots$$

Observa que en los denominadores de las fracciones de la lista anterior aparecen los múltiplos de 12.

Notemos que 36 es un denominador común en ambas de estas dos listas anteriores y es el menor de ellos. En otras palabras, $36 = \text{MCM}(9, 12)$.

Ahora bien, como $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$ y como $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$, tenemos que:

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{8}{36} + \frac{15}{36}$$

Para sumar (o restar) fracciones que tienen igual denominador, se suman (o se restan) esos numeradores y se conserva el denominador común.

Por lo tanto,

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{8+15}{36} = \frac{23}{36}.$$

Luego, la respuesta correcta es B.

Comentario. Conviene hacer un resumen de cómo se suman dos fracciones.

Consideremos el mismo ejemplo anterior: efectuar la suma $\frac{2}{9} + \frac{5}{12}$.

Primero, se saca el MCM(9, 12).

Es decir, se saca el Mínimo Común Múltiplo entre los denominadores 9 y 12 de las fracciones que se van a sumar.

Para hacerlo, lee la solución del problema anterior.

Resulta, $\text{MCM}(9, 12) = 36$.

Se sustituyen ahora las fracciones $\frac{2}{9}$ y $\frac{5}{12}$ por fracciones respectivamente equivalentes, que tengan por denominador común el 36.

Como 9 cabe 4 veces en 36 (pues $9 \times 4 = 36$), debemos multiplicar arriba y abajo en la fracción $\frac{2}{9}$ por 4, resultando que:

$$\frac{2}{9} = \frac{8}{36}.$$

Como 12 cabe 3 veces en 36 (pues $12 \times 3 = 36$), debemos multiplicar arriba y abajo en la fracción $\frac{5}{12}$ por 3, resultando que:

$$\frac{5}{12} = \frac{15}{36}.$$

Luego,

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{12} = \frac{8}{36} + \frac{15}{36} = \frac{8+15}{36} = \frac{23}{36}.$$

Para suma (o resta) de tres o más fracciones se procede similarmente.

Por ejemplo, calculemos:

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{15} - \frac{3}{20}.$$

Primero sacamos el MCM(12, 15, 20) como lo hicimos en la solución del problema 2 anterior.

Resulta $60 = \text{MCM}(12, 15, 20)$.

Se sustituyen ahora las fracciones $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{15}$ y $\frac{3}{20}$ por fracciones respectivamente equivalentes, que tengan por denominador común el 60.

Como 12 cabe 5 veces en 60, debemos amplificar (es decir, multiplicar arriba y abajo) la fracción $\frac{1}{12}$ por 5, resultando que:

$$\frac{1}{12} = \frac{5}{60}.$$

Similarmente, tenemos:

$$\frac{2}{15} = \frac{8}{60}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{9}{60}.$$

Luego,

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{15} - \frac{3}{20} = \frac{5}{60} + \frac{8}{60} - \frac{9}{60} = \frac{5+8-9}{60} = \frac{4}{60}.$$

(esta última fracción se puede simplificar, como lo revisamos en el problema resuelto 2 de la Lección 9). Resulta que la simplificación de $\frac{4}{60}$ se obtiene dividiendo por 4 tanto el numerador como el

denominador de la fracción $\frac{4}{60}$, obteniéndose $\frac{1}{15}$

Practica ahora, sumando (o restando) las fracciones:

(1) $\frac{1}{6} + \frac{4}{15}$

(2) $\frac{5}{18} - \frac{4}{21}$

(3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{10}$

(4) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} - \frac{1}{15}$

Las respuestas son:

- (1) $\frac{13}{30}$
(2) $\frac{11}{126}$
(3) $\frac{43}{60}$
(4) $\frac{87}{120}$ (que simplificada es $\frac{29}{40}$).

Problema 3. Mariche hizo un viaje en tres horas. En la primera hora recorrió los $\frac{3}{8}$ del viaje y en la segunda hora recorrió los $\frac{5}{12}$ del viaje. ¿Qué parte del viaje recorrió en la tercera hora?

- A. $\frac{8}{20}$
B. $\frac{19}{24}$
C. $\frac{12}{20}$
D. $\frac{5}{24}$
E. Ninguna de las anteriores.

Solución. En las dos primeras horas, Mariche recorrió $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$ del trayecto total del viaje. Vamos a efectuar la suma $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$ y expresarla en una sola fracción. Procedemos de acuerdo a como lo explicamos en la solución anterior.

Se tiene sucesivamente,

$$\text{MCM}(8, 12) = 24,$$

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24},$$

$$\frac{5}{12} = \frac{10}{24}.$$

Si tienes dificultades en entender estos pasos, debes revisar la solución del problema anterior.

En consecuencia,

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} = \frac{9}{24} + \frac{10}{24} = \frac{9+10}{24} = \frac{19}{24}.$$

Por lo tanto, Mariche, en las dos primeras horas hizo los $\frac{19}{24}$ del viaje.

El viaje total es $\frac{24}{24}$.

Entonces, en la tercera hora Mariche recorrió lo que le falta a $\frac{19}{24}$

para completar $\frac{24}{24}$.

Luego, a Mariche le faltan los $\frac{24}{24} - \frac{19}{24}$ del viaje.

Pero, $\frac{24}{24} - \frac{19}{24} = \frac{24-19}{24} = \frac{5}{24}$.

Es decir, en la tercera hora, Mariche hizo los $\frac{5}{24}$ del viaje.

La respuesta correcta es D.

Comentario. Para practicar un poco más este tipo de problemas, resuelve los siguientes:

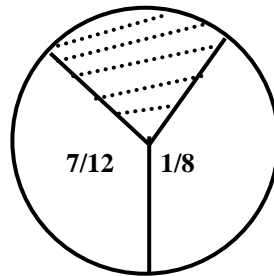
(1) Alberto hizo los $\frac{2}{5}$ de su tarea en la mañana y los $\frac{4}{9}$ en la tarde.

¿Qué parte de su tarea aun le falta?

(2) Jorge pinta los $\frac{5}{12}$ de una muralla y Javier pinta los $\frac{4}{15}$ de la

muralla. ¿Qué parte de la muralla debe pintar ahora Felipe para completar el trabajo?

(3) ¿Qué parte del círculo es la parte sombreada?



Las respuestas son:

(1) $\frac{7}{45}$

(2) $\frac{19}{60}$

(3) $\frac{7}{24}$

Problema 4. El 40 % de un número es 24. ¿Cuál es el número?

- A. 6
- B. 0,96
- C. 96
- D. 0,8
- E. 60

Solución. Por la tabla que fue vista en la solución del problema resuelto 4 de la Lección 9, el 40% de un número corresponde a los $\frac{2}{5}$ del número. El problema se reduce, entonces, al siguiente:

“Los $\frac{2}{5}$ de un número es 24. ¿Cuál es el número?”

Observa que si los $\frac{2}{5}$ de un número es 24, entonces $\frac{1}{5}$ del número es la mitad de 24 (pues $\frac{1}{5}$ es la mitad de $\frac{2}{5}$).

Luego, $\frac{1}{5}$ del número es 12.

El problema se reduce entonces al siguiente:

“La quinta parte de un número es 12. ¿Cuál es el número?”

El número es: $12 \times 5 = 60$. La respuesta correcta es E.

Comentario. Al principio de la solución, dijimos que por la tabla en la solución del problema 4 de la Lección 9 anterior, el 40% de un número corresponde a los $\frac{2}{5}$ del número. Miremos esto directamente, sin ver la tabla.

El 40% de un número corresponde al $\frac{40}{100}$ del número.

Simplificando ahora esta fracción (como lo hicimos en el problema resuelto 2 de la Lección 9), tenemos, dividiendo arriba y abajo por $\text{MCD}(40, 100) = 20$, que: $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Luego, el 40% de un número

corresponde a los $\frac{2}{5}$ del número.

Practica las ideas envueltas en la solución de este problema, resolviendo los siguientes ejercicios:

(1) La cuarta parte de un número es 20. ¿Cuál es el número?

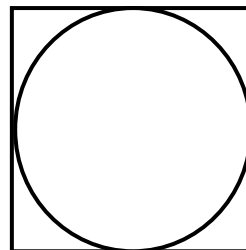
- (2) Los $\frac{3}{10}$ de un número es 21. ¿Cuál es el número?
- (3) Los $\frac{4}{5}$ de un número es 16. ¿Cuál es el número?
- (4) El 60% de un número es 18. ¿Cuál es el número?
- (5) El 30% de un número es 20. ¿Cuál es el número?
- (6) En una fiesta había 40 personas, lo cual representa el 80% de los invitados. ¿Cuál fue el número total de invitados?
- (7) En un concurso se premió a 21 participantes. Si solo el 75% de los participantes recibieron premios, ¿cuál fue el número total de inscritos en el concurso?

Las respuestas son:

- (1) 80
(2) 70
(3) 20
(4) 30
(5) 66,66
(6) 50
(7) 28

Problema 5. El perímetro del cuadrado de la figura es 16 cm. ¿Cuál es el área del círculo inscrito?

- A. $16\pi \text{ cm}^2$
B. $8\pi \text{ cm}^2$
C. $4\pi \text{ cm}^2$
D. $2\pi \text{ cm}^2$
E. $\pi \text{ cm}^2$



Solución. Recordemos que el área A de un círculo es el producto del cuadrado de su radio R por π (mira la solución del problema resuelto 5 de la Lección 9 para revisar un poco este número π).

Es decir:

$$A = R^2 \times \pi.$$

Luego, para conocer el área de un círculo, debemos conocer su radio.

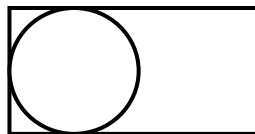
En el caso de este problema, como la longitud del lado de un cuadrado es la cuarta parte de su perímetro, entonces el lado del cuadrado es 4 cm. Luego, el diámetro del círculo es 4 cm. Por lo tanto, el radio del círculo es 2 cm.

Su área es entonces $2^2 \times \pi = 4 \times \pi \text{ cm}^2$. Recordemos, como lo hicimos notar en el problema resuelto 5 de la Lección 11, que $4 \times \pi$ también se escribe como 4π .

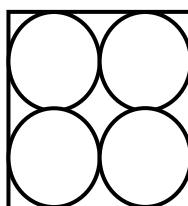
Luego, la respuesta correcta es C.

Comentario. Se debe practicar este tipo de ejercicios un poco más. Para ello, resuelve los siguientes problemas.

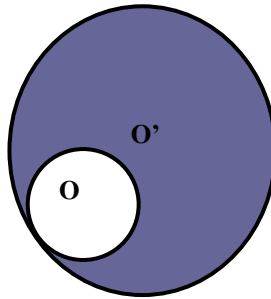
- (1) El área del rectángulo de la figura es 48 cm^2 y su largo es 8 cm. ¿Cuál es el área del círculo que se observa?



- (2) El área del cuadrado de la figura es 144 cm^2 . ¿Cuál es el área de cada círculo?



- (3) La distancia entre los dos centros O y O' de las dos circunferencias de la figura, es de 3 metros. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?



Las respuestas son:

- (1) 9π (primero calcula el ancho del rectángulo y observa que el radio del círculo es la mitad del ancho).
- (2) 9π (primero calcula el lado del cuadrado y luego, observa que el radio de cada círculo es la cuarta parte del lado del cuadrado).
- (3) $27\pi \text{ m}^2$ (observa que el área pedida es el área del círculo grande menos el área del círculo pequeño. Ahora observa que el radio del círculo grande es 6 m y que el radio del círculo pequeño es 3 m).

EXAMEN 10

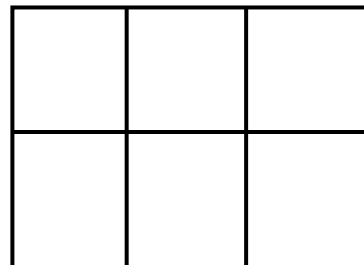
Resuelve los siguientes 8 problemas y marca con una cruz tus respuestas en la hoja de respuestas que está al final de este examen.

1. La suma $\text{MCM}(12, 18) + \text{MCM}(18, 24)$ es igual a:

- A. 36
- B. 108
- C. 72
- D. 120
- E. Ninguno de los anteriores.

2. ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?

- A. 6
- B. 8
- C. 10
- D. 12
- E. Ninguna de las anteriores.



3. Todas las mercaderías de una tienda están con el 20% de descuento. Si una camisa valía Bs. 28.500, ¿cuánto vale ahora?

- A. Bs. 34.200
- B. Bs. 28.480
- C. Bs. 28.500
- D. Bs. 5.700
- E. Bs. 22.800

4. El largo de un rectángulo es 14,50 cm y el ancho es el 30% del largo. ¿Cuál es el área del rectángulo?

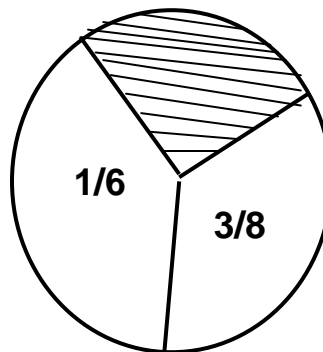
- A. 63,075 cm²
- B. 630,75 cm²
- C. 63,75 cm²
- D. 637,5 cm²
- E. Ninguna de las anteriores.

5. Dos automóviles parten al mismo tiempo desde la partida de un circuito circular. Uno de ellos da una vuelta cada 6 minutos y el otro da una vuelta cada 8 minutos. ¿Después de cuánto tiempo se encuentran en la partida nuevamente?

- A. 14 minutos.
- B. 48 minutos.
- C. 24 minutos.
- D. 12 minutos.
- E. 18 minutos.

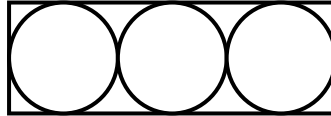
6. ¿Qué fracción del círculo es la parte sombreada?

- A. $\frac{13}{24}$
- B. $\frac{4}{14}$
- C. $\frac{10}{14}$
- D. $\frac{11}{24}$
- E. $\frac{1}{3}$



7. El largo del rectángulo de la figura es 24 m. ¿cuál es el área de cada círculo?

- A. $18\pi \text{ m}^2$
- B. $64\pi \text{ m}^2$
- C. $16\pi \text{ m}^2$
- D. $48\pi \text{ m}^2$
- E. Ninguna de las anteriores.



8. Nataly hizo un viaje de 180 km en 3 días. En el primer día recorrió $\frac{1}{3}$ de ellos y en el segundo día recorrió $\frac{2}{5}$ de lo que le faltaba. ¿Cuánto recorrió el tercer día?

- A. 60 km
- B. 24 km
- C. 48 km
- D. 108 km
- E. 72 km

HOJA DE RESPUESTAS

1.
A B C D E

2.
A B C D E

3.
A B C D E

4.
A B C D E

5.
A B C D E

6.
A B C D E

7.
A B C D E

8.
A B C D E

INDICACIONES PARA RESOLVER EL EXAMEN 10.

1. Calcula $MCM(12, 18)$ y $MCM(18, 24)$ por la vía rápida explicada en la solución del problema resuelto 1 de esta Lección.
2. Hay más de 6. Similar al problema resuelto 1 de la Lección 1.
3. Para porcentajes, lee el problema resuelto 2 de la Lección 9. El valor pedido es Bs. 28.500 menos su 20%.
4. Para porcentajes, lee el problema resuelto 2 de la Lección 9. Para multiplicar con decimales revísalo en tu libro del colegio (o usa la calculadora si te permiten). Para el área de un rectángulo mira el problema resuelto 5 de la Lección 7.
5. Similar al problema resuelto 1 de esta Lección.
6. Lee el problema resuelto 3 de esta Lección.
7. Similar al problema resuelto 5 de esta Lección.
8. Similar al problema resuelto 3 de esta Lección.

ÍNDICE ALFABÉTICO

El o los números que aparecen abajo son las páginas de este libro donde están los respectivos conceptos.

A

Altura de un paralelogramo,
Altura de un triángulo,
Amplificación de fracciones,
Ángulo del centro,
Ángulo recto,
Área del rectángulo,
Área de un círculo,
Área de un paralelogramo,
Área de un triángulo,

B

Base de un triángulo,

C

Caras de un cubo,
Caras de un cuerpo,
Cilindro,
Círculo,
Círculo (área del),
Circunferencia,
Circunferencia (centro, radio, diámetro),
Circunferencia (perímetro de la),
Circunscrito,
Comparación de fracciones,
Complemento de un ángulo,
Cono,
Cono truncado,
Cuadrado,

Cuadrado de un número,
Cuadrilátero,
Cubo,

D

Decágono,
Denominador de una fracción,
Diagonales de un polígono,
Diámetro,
Divisores de un número entero,

F

Fracción de una figura,
Fracción (amplificación),
Fracción (denominador de una),
Fracción (numerador de una),
Fracciones (comparación de),
Fracciones equivalentes,
Fracciones (suma de),
Fracciones (simplificación de)

G

Giros,

H

Heptágono,
Hexágono,

M

MCD,
Máximo Común Divisor,
MCM,
Método de Euclides,
Mínimo Común Múltiplo,

Múltiplos de un número entero,

N

Numerador de una fracción,

Número entero,

Número primo,

P

Paralelas,

Paralelepípedo,

Paralelogramo,

Pentágono,

Perímetro de un cuadrado,

Perímetro de un rectángulo,

Perímetro de un triángulo,

Perímetro de una circunferencia,

Perpendiculares,

Pirámide,

Porcentajes,

Potencias (base exponente),

Prisma recto,

R

Radio de una circunferencia,

Rectángulo,

Rectas paralelas,

Rectas perpendiculares,

Rombo,

Romboide,

S

Simplificar una fracción,
Suma de fracciones,
Suplemento de un ángulo,

T

Trapezio,
Tetraedro,
Triángulo equilátero,
Triángulo escaleno,
Triángulo isósceles,
Triángulo rectángulo,

V

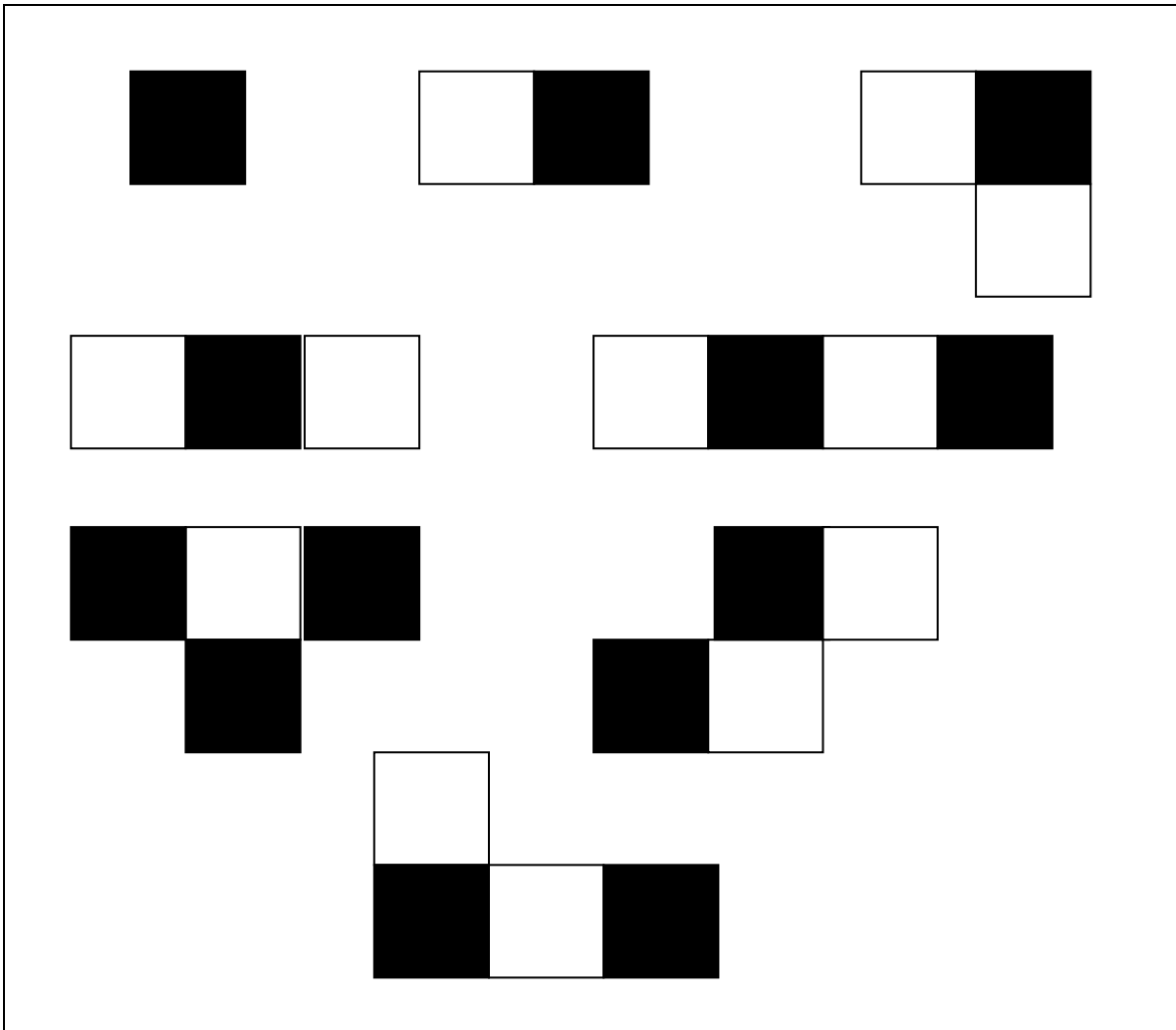
Vértice,

PUZZLE: EL CUADRADO

El autor de este texto ha creado para tu diversión el siguiente puzzle.

Recorta esta hoja a lo largo del marco exterior y pégala en un cartón o cartulina. Luego, recorta cada una de las siguientes 8 piezas del puzzle. Con estas piezas debes construir el cuadrado que se encuentra en la contratapa de este libro.

El cuadrado negro pequeño (que está en primer lugar a la izquierda abajo) debe quedar en el centro del cuadrado que debes construir.



(CONTRATAPA)

Este es el primero de una serie de tres textos que ayudan a desarrollar la habilidad matemática de los estudiantes interesados, hasta un nivel preuniversitario.

Este nivel 1 está escrito para estudiantes de quinto grado, sexto grado o para egresados de la enseñanza primaria, y está basado en ejercicios que ayudan a desarrollar la habilidad matemática, usando solo los conocimientos de los tres últimos años de la educación primaria (cuarto, quinto y sexto grado).

Este nivel 1 puede también ser usado, como un texto inicial, por estudiantes de la enseñanza secundaria que tengan la intención de desarrollar su habilidad matemática con miras hacia el ingreso a la Universidad.

PUZZLE: EL CUADRADO

Instrucciones en la página anterior

