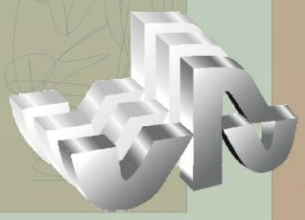
Zeferino A. da Fonseca Lopes

El método de los elementos finitos: una introducción



FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA
Universidad Rafael Urdaneta

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS:

Una Introducción

Zeferino A. da Fonseca Lopes

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS:

Una Introducción

FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA
Universidad Rafael Urdaneta

Universidad Rafael Urdaneta

Autoridades Rectorales

Dr. Jesús Esparza Bracho, Rector
Ing. Maulio Rodríguez, Vicerrector Académico
Ing. Salvador Conde, Secretario

Lic. Nancy Villarroel M.L.S. Directora de Biblioteca

2011© Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta

Portada: Luz Elena Hernández

Universidad Rafael Urdaneta, Fondo Editorial Biblioteca
Vereda del Lago, Maracaibo, Venezuela.

ISBN: 978-980-7131-12-4

Deposito Legal: lfi2382011510516

A mis Hijas:

Marianella

Rosibel

Patricia

CONTENIDO

Prefacio **xi**

Capítulo I **1**

Conceptos básicos del método de los elementos finitos

1.1 Introducción 1
1.2 Antecedentes históricos 2
1.3 Etapas básicas en la formulación del método de los elementos finitos 3
1.3.1 Definición del problema y su dominio 4
1.3.2 Discretización del dominio 4
1.3.3 Identificación de la(s) variable(s) 5
1.3.4 Formulación del problema 5
1.3.5 Establecimiento de los sistemas de referencia 5
1.3.6 Construcción de las funciones de aproximación de los elementos 6
1.3.7 Determinación de las ecuaciones de los elementos 7
1.3.8 Transformación de coordenadas 8
1.3.9 Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos 8
1.3.10 Introducción de las condiciones de contorno 8
1.3.11 Solución del sistema de ecuaciones resultante 8
1.3.12 Interpretación de los resultados 8
1.4 Ejemplo 1.1. Determinación del valor de π 9
1.5 Implementación computacional del método de los elementos finitos 12
1.6 Métodos y formulaciones de las ecuaciones de los elementos 12
1.6.1 El método directo 13
1.6.2 El método variacional 13
1.6.3 El método de los residuos pesados 13
1.7 Modelos de elementos finitos en la mecánica de los sólidos 14
1.8 Modelos de elementos finitos en la mecánica de los fluidos 14

Capítulo II **17**

Formulación del método de los elementos finitos vía el método directo

2.1 Introducción 17
2.2 Sistemas de resortes lineales 17
2.3 Elementos simples de la mecánica estructural 19
2.3.1 Elemento unidimensional sometido a carga axial 19
2.3.2 Elemento de armadura plana 20
2.3.3 Elemento de viga de eje recto 21
2.4 Formulación general del método directo 24
2.4.1 Elemento unidimensional sometido a carga axial 24
2.4.2 Elemento de viga de eje recto 27
2.4.3 Elemento bidimensional 31
2.4.4 Estado plano de tensiones 33

	2.4.5	Estado plano de deformaciones	39
2.5	Transformación de coordenadas		40
	2.5.1	Formulación directa	40
	2.5.2	Formulación vía matrices de rotación	42
2.6	Ensamblaje de las matrices de rigidez		47
	2.6.1	Reglas del ensamblaje	47
	2.6.2	Procedimiento general del ensamblaje	51
	2.6.3	Características de la matriz ensamblada	52
2.7	Introducción de las condiciones de contorno		54
2.8	Vector de cargas nodales equivalente en el método directo		56
2.9	Ejemplos de la mecánica estructural		57
2.9.1	Ejemplo 2.1. Elemento unidimensional sometido a carga axial		58
2.9.2	Ejemplo 2.2 Elemento de armadura plana		61
2.9.3	Ejemplo 2.3. Elemento de viga de eje recto		66
	2.9.4	Ejemplo 2.4. Placa en estado plano de tensiones	72
2.10	El método directo en problemas no estructurales		76
	2.10.1	Flujo de redes en tuberías	77
	2.10.1.1	Ejemplo 2.5. Red de tuberías	78
	2.10.2	Flujo de redes eléctricas	81
	2.10.2.1	Ejemplo 2.6. Red eléctrica	81
	2.10.3	Conducción de calor unidimensional	85
	2.10.3.1	Ejemplo 2.7. Flujo de calor unidimensional	86

Capítulo III **91**

Elementos y funciones de interpolación

3.1	Introducción		91
3.2	Elementos unidimensionales		91
	3.2.1	Elementos de Lagrange	91
	3.2.1.1	Coordenadas naturales	93
	3.2.1.2	Ejemplo 3.1. Distribución de temperatura en un elemento unidimensional	96
	3.2.2	Elementos de Hermite	97
3.3	Elementos bidimensionales		99
	3.3.1	Funciones de interpolación de elementos bidimensionales	99
	3.3.2	Funciones de interpolación del elemento triangular lineal	101
	3.3.2.1	Ejemplo 3.2. Distribución de presiones en un elemento bidimensional	102
	3.3.3	Coordenadas naturales para elementos triangulares	104
	3.3.4	Elementos triangulares de orden superior	105
	3.3.5	Funciones de interpolación del elemento rectangular lineal	108
	3.3.6	Elementos rectangulares de orden superior	110

3.3.7	Coordenadas naturales de los elementos rectangulares	113
3.3.8	Elementos serendipity	115
3.3.9	Elementos isoparamétricos	121
3.3.10	Cálculo de las derivadas de las funciones de interpolación	123
3.3.10.1	Elementos triangulares	123
3.3.10.2	Ejemplo 3.3. Cálculo de las derivadas de las funciones de interpolación de un elemento triangular	124
3.3.10.3	Elementos rectangulares	126
3.3.10.4	Ejemplo 3.4. Cálculo de las derivadas de las funciones de interpolación de un elemento rectangular	127
3.3.11	Integración numérica	129
3.3.11.1	Cuadratura numérica sobre un elemento triangular patrón	130
3.3.11.2	Cuadratura numérica sobre un elemento rectangular patrón	131

Capítulo IV **133**

Formulación variacional del método de los elementos finitos

4.1	Introducción.	133
4.2	El problema de brachistochrone	133
4.3	La primera variación de un funcional	135
4.4	Funciones con varias variables dependientes	139
4.5	Funciones con varias variables independientes	140
4.6	Funciones con varias variables dependientes y varias variables Independientes	141
4.7	El método de Rayleigh-Ritz	142
4.7.1	Ejemplo de aplicación del método de Ritz	144
4.8	Relación entre el método de Ritz y el método de los elementos finitos	145
4.9	Deducción de las ecuaciones de los elementos finitos a partir de un principio variacional	146
4.9.1	Solución de un problema de valor de contorno mediante un enfoque variacional	147
4.10	Formulación variacional de problemas de la mecánica de los sólidos	151
4.10.1	Ecuaciones básicas de la mecánica de los sólidos	152
4.10.1a	Ecuaciones de equilibrio externo	152
4.10.1b	Ecuaciones de equilibrio interno	153
4.10.1c	Relaciones deformación-desplazamiento	155
4.10.1d	Ecuaciones de compatibilidad	157
4.10.1e	Ecuaciones constitutivas	158
4.10.1f	Condiciones de contorno	160
4.10.2	Principio de la mínima energía potencial	161
4.10.3	Elasticidad tridimensional	162

4.10.3a Energía de deformación 162
4.10.3b Trabajo realizado por las fuerzas externas 165
4.10.4 Elasticidad axisimétrica 166
4.10.4a Energía de deformación 166
4.10.4b Trabajo realizado por las fuerzas externas 167
4.11 Deducción de las ecuaciones de los elementos finitos, asociadas al principio de la mínima energía potencial 168
4.11.1 Elasticidad tridimensional 168
4.11.2 Elasticidad axisimétrica 171
4.12 Evaluación de los coeficientes de las matrices locales de rigidez y de los vectores de cargas nodales equivalente de los elementos 173
4.12.1 Coeficientes de la matriz de rigidez 174
4.12.2 Coeficientes del vector de cargas nodales equivalente 174
4.13 Solución de problemas de la mecánica de los sólidos vía el principio de la mínima energía potencial 176
4.13.1 Ejemplo 4.1. Barra unidimensional sometida a carga axial 177
4.13.2 Ejemplo 4.2. Placa delgada sometida a un estado de carga uniforme 178
4.13.3 Ejemplo 4.3. Placa delgada sometida a una compresión uniforme 181
4.13.4 Ejemplo 4.4. Cilindro sometido a presión interna: solución bidimensional 183
4.13.5 Ejemplo 4.5. Cilindro sometido a presión interna: solución axisimétrica 186

Capítulo V 189

Problemas de campo escalar

5.1 Introducción 189
5.2 Problemas tridimensionales 190
5.3 Discretización en el tiempo 193
5.4 Problemas axisimétricos 193
5.5 Conducción de calor 194
5.6 Torsión de barras prismáticas 196
5.7 Flujo a través de medios porosos 197
5.8 Campos electrostáticos 199
5.9 Solución de algunos problemas de campo escalar 200
5.9.1 Ejemplo 5.1. Conducción de calor en una aleta Trapezoidal 200
5.9.2 Ejemplo 5.2. Conducción de calor en una placa rectangular con condiciones esenciales de contorno: caso permanente 204
5.9.3 Ejemplo 5.3. Conducción de calor en una placa bidimensional con condiciones naturales de contorno 206
5.9.4 Ejemplo 5.4. Conducción de calor en una pared adiabática:

caso no permanente 208
5.9.5 Ejemplo 5.5. Torsión de una barra prismática de sección transversal cuadrada 210
5.9.6 Ejemplo 5.6. Torsión de una barra prismática de sección transversal circular 212
5.9.7 Ejemplo 5.7. Torsión de una barra prismática de sección transversal elíptica 214
5.9.8 Ejemplo 5.8. Torsión de una barra prismática de sección transversal triangular 215
5.9.9 Ejemplo 5.9. Flujo subterráneo de agua en un acuífero Homogéneo 217
5.9.10 Ejemplo 5.10. Zona acuífera delimitada por los ríos Boconó y Masparro 219
5.9.11 Ejemplo 5.11. Cable coaxial rectangular 220

Capítulo VI 223

Formulación del método de los elementos finitos vía residuos pesados

6.1 Introducción 223
6.2 Formulación general del método de los residuos pesados 223
6.2.1 Método de la colocación 224
6.2.2 Método de los subdominios. 225
6.2.3 Método de los mínimos cuadrados 225
6.2.4 Método de Galerkin 226
6.3 Aplicación del método de los residuos pesados a un problema de valor de contorno 226
6.4 Aplicación del método de los residuos pesados a un problema de conducción de calor unidimensional 229
6.5 Formulación Galerkin/(mef) de problemas de la mecánica de los sólidos: caso tridimensional 232
6.6 Formulación Galerkin/(mef) de problemas de la mecánica de los sólidos: caso axisimétrico 236
6.7 El método de Galerkin/(mef) aplicado a la mecánica de los fluidos.
6.7.1 Ecuaciones básicas asociadas a la mecánica de los fluidos 239
6.7.1a Ecuación de continuidad: caso tridimensional 239
6.7.1b Ecuación de continuidad: caso axisimétrico 240
6.7.1c Ecuaciones de movimiento: caso tridimensional 240
6.7.1d Ecuaciones de movimiento: caso axisimétrico 240
6.7.1e Ecuaciones constitutivas 240
6.7.1f Condiciones de contorno 242
6.7.2 Formulación Galerkin/(mef) de las ecuaciones de conservación: modelo U-V-P 243
6.7.2a Caso tridimensional 243

	6.7.2b	Caso axisimétrico	248
6.7.3	Formulación Galerkin/(mef) de las ecuaciones de conservación: modelo penalti		251
	6.7.3a	Caso tridimensional	251
	6.7.3b	Caso axisimétrico	254
6.8	Solución de problemas de la mecánica de los fluidos mediante el método de Galerkin/(mef)		255
6.8.1	Fluidos newtonianos		256
	6.8.1a	Ejemplo 6.1 Fluidos de Couette y Poiseuille	256
	6.8.1b	Ejemplo 6.2 Flujo deslizante entre dos placas paralelas	259
	6.8.1c	Ejemplo 6.3 Cojinete hidrodinámico	261
	6.8.1d	Ejemplo 6.4 Flujo a través de una contracción suave (4:1)	264
	6.8.1e	Ejemplo 6.5 Flujo a través de una contracción abrupta (10:1)	266
6.8.2	Fluidos no-newtonianos		267
	6.8.2a.- Ejemplo 6.6. . Contracción plana abrupta: Relación 10:1		268
6.8.3	Hinchamiento de fluidos viscosos		270
	6.8.3a	Mecanismo del fenómeno del hinchamiento	270
	6.8.3b	Cálculo de la superficie libre	271
	6.8.1c	Ejemplo 6.7. Hinchamiento de fluidos newtonianos a través de boquillas planas	273
	6.8.1d	Ejemplo 6.8. Hinchamiento de fluidos no-newtonianos a través de boquillas planas	275
	6.8.1e	Ejemplo 6.9. Hinchamiento a través de boquillas circulares	275

Bibliografía **277**

PREFACIO

El método de los elementos finitos (**mef**), se ha constituido con el transcurrir de los años, en una herramienta numérica indispensable, no sólo en el área de la ingeniería de diseño, si no también en muchas otras áreas de las ciencias en general. Los programas de computación basados en esta técnica numérica, son ampliamente usados en la investigación y en la solución de innumerables problemas relacionados con la mecánica del medio continuo.

La motivación fundamental que me condujo a escribir este libro, fue la de presentar a los estudiantes de los últimos semestres ingeniería y de los cursos de maestría, un texto sobre el **mef** en el cual los conceptos básicos del mismo fuesen tratados del modo más simple posible. Así, aun cuando no se omiten los aspectos fundamentales, desde el punto de vista matemático, asociados al método, se hace énfasis tanto en su interpretación física como en su implementación computacional.

El texto está dividido en seis capítulos, en los cuales se presenta el **mef** tal como éste se desarrolló, históricamente, a través de los años. En el capítulo 1 se hace una breve reseña histórica del método y se introducen los principios básicos del mismo.

En el capítulo 2, se desarrolla la formulación del **mef** vía el método directo. Para abordar este capítulo, al lector le bastará tener los conocimientos básicos del álgebra matricial y la mecánica de materiales. Los ejemplos que se resuelven al final de este capítulo, están relacionados con el área antes mencionada, así como también con la mecánica de los fluidos y transferencia de calor. La resolución de dichos problemas se hace en forma detallada y paso a paso, siguiendo el mismo procedimiento sistemático de un programa computacional basado en el **mef**.

En el capítulo 3, se deducen las funciones de interpolación de algunos elementos finitos tanto unidimensionales como bidimensionales, y se resumen los aspectos relacionados con la integración numérica.

En el capítulo 4, se estudia la formulación variacional del **mef** asociada a la teoría lineal de la elasticidad. Puesto que esta formulación está íntimamente ligada al cálculo variacional, al inicio de este capítulo se presenta, en forma resumida, las nociones fundamentales de dicho cálculo. Al final de este capítulo se resuelven algunos problemas relacionados con la mencionada teoría.

En el capítulo 5, se muestra la solución de algunos problemas conocidos con el nombre de campo escalar. Las correspondientes ecuaciones de los elementos finitos, se deducen a partir del funcional que gobierna este tipo de problemas, y se resuelven algunos problemas que frecuentemente aparecen en la práctica, tales como los asociados a la conducción de calor, torsión en barras prismáticas, flujo de fluidos a través de medios porosos y campos electrostáticos.

En el capítulo 6, se presenta la formulación general del **mef** vía residuos pesados, y se deducen las ecuaciones de los elementos finitos correspondientes a la teoría lineal de la elasticidad y a la mecánica de los fluidos, mediante el método de Galerkin. Al final de este capítulo se muestra la solución numérica de algunos problemas relacionados con esta última área de la mecánica, específicamente los asociados con la entrada y salida de flujos de fluidos viscosos a través de boquillas planas y circulares, y también se presenta una solución al fenómeno del hinchamiento.

Es importante destacar que el único motivo por el cual el capítulo 4 está enfocado en exclusiva, a la teoría lineal de la elasticidad, y el capítulo 6 fundamentalmente al campo de la mecánica de los fluidos, se debe al hecho que se quiso mantener la secuencia del texto en el orden cronológico del desarrollo histórico del **mef** pero, por supuesto, las formulaciones presentadas en ambos capítulos se pueden aplicar, en general, indistintamente a ambas ramas de la ciencia.

Para facilitar la implementación computacional de las ecuaciones de los elementos finitos, en el texto se ha privilegiado la escritura por extenso de la sintaxis matemática de dichas ecuaciones, y no se ha hecho uso de la escritura compacta que usualmente acompaña los libros que abordan este método.

Agradezco al Dr Agustín Torres de la empresa Investigación y Desarrollo (INDESCA), del Complejo Petroquímico Ana María Campos del Estado Zulia, Venezuela, y al Prof. Juan Damia, Ph.D. de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Zulia, la lectura de algunos capítulos del presente texto y sus valiosos comentarios y sugerencias. Deseo enfatizar, sin embargo, que cualesquiera inexactitudes o errores que se encuentren en el mismo es de mi entera y única responsabilidad.

Zeferino A. Da Fonseca Lopes

I.- CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

1.1.- Introducción

Muchos problemas de importancia práctica que frecuentemente aparecen en ingeniería, resultan de una complejidad matemática tal que, aunque la deducción de las ecuaciones diferenciales que gobiernan tales problemas no resulta muy difícil, su solución por métodos exactos de análisis, aun después de introducir algunas hipótesis simplificadoras, no se logra si no para ciertos problemas de geometría, condiciones de contorno y/o sistemas de carga muy particulares. Por esto, aunque este tipo de solución es la que más información proporciona sobre el comportamiento de las variables involucradas en un problema dado, se debe recurrir a los métodos numéricos, los cuales permiten elaborar análisis y diseños con un alto grado de sofisticación y precisión.

Los métodos de los elementos finitos, de diferencias finitas, de volumen de control (bien sea basado en diferencias finitas o elementos finitos) y de contorno, son apenas algunos, entre una gran gama de métodos numéricos que se han venido desarrollando y usando exitosamente, en la solución de muchos problemas en distintas áreas de la ciencia. Aun cuando todos estos métodos constituyen una muy poderosa herramienta matemática, no dejan de ser métodos aproximados, debiéndose tener por lo tanto un especial cuidado en su utilización, ya que la calidad de las soluciones que se obtengan depende de varios factores, entre los cuales se pueden destacar la distribución de la discretización espacial de la región en estudio, el tipo de discretización en el tiempo en los problemas no permanentes, la aplicación apropiada de las condiciones de contorno, la correcta inclusión en el modelo de las propiedades físicas de los materiales que intervienen en el problema, etc. El correcto posicionamiento de estos aspectos requiere del sentido común y alguna experiencia del analista, independientemente del método seleccionado.

La disponibilidad, en la actualidad, de numerosos programas computacionales basados en las diferentes técnicas numéricas mencionadas, dan al ingeniero la oportunidad de obtener información muy detallada sobre el comportamiento de las variables involucradas en un determinado problema. Sin embargo, la existencia de esta posibilidad, aumenta en vez de reducir, la necesidad de un juicio firme de ingeniería sobre el uso de un programa dado. La información de salida de un computador, aun con las ayudas gráficas que existen en el presente, nunca podrá sustituir el entendimiento y el sentido común del analista.

Visto globalmente, la solución numérica de un problema dado se puede esquematizar tal como se muestra en la Fig.1.1. El sistema real del problema a resolver, se transforma en un modelo matemático, mediante la inclusión de los principios físicos y de conservación que rigen el mismo, la ciencia de los materiales, hipótesis consideradas, etc., asociados al problema a resolver. Una vez logrado el modelo matemático y antes de obtener la solución aproximada deseada, dicho modelo debe ser verificado, cotejando su respuesta en situaciones más restringidas, de las cuales se puede conocer la solución exacta, bien sea mediante métodos exactos de solución, o vía métodos experimentales. Sólo después de esta etapa de prueba, el modelo matemático propuesto podrá ser discretizado, a través de alguna técnica numérica, para finalmente obtener la solución aproximada deseada, mediante la solución numérica del modelo ya discreto.

Entre las técnicas numéricas ya mencionadas, una de las que más se ha destacado desde hace aproximadamente cuarenta años, tanto por su capacidad para modelar dominios irregulares, condiciones de contorno, no-linealidades (geométricas y/o mecánicas), y/o sistemas de cargas complejos (características éstas que aparecen en la gran mayoría de los problemas de interés

práctico), como por la facilidad en la selección del mecanismo de aproximación de las variables involucradas en un problema específico, es el Método de los Elementos Finitos (**mef**).

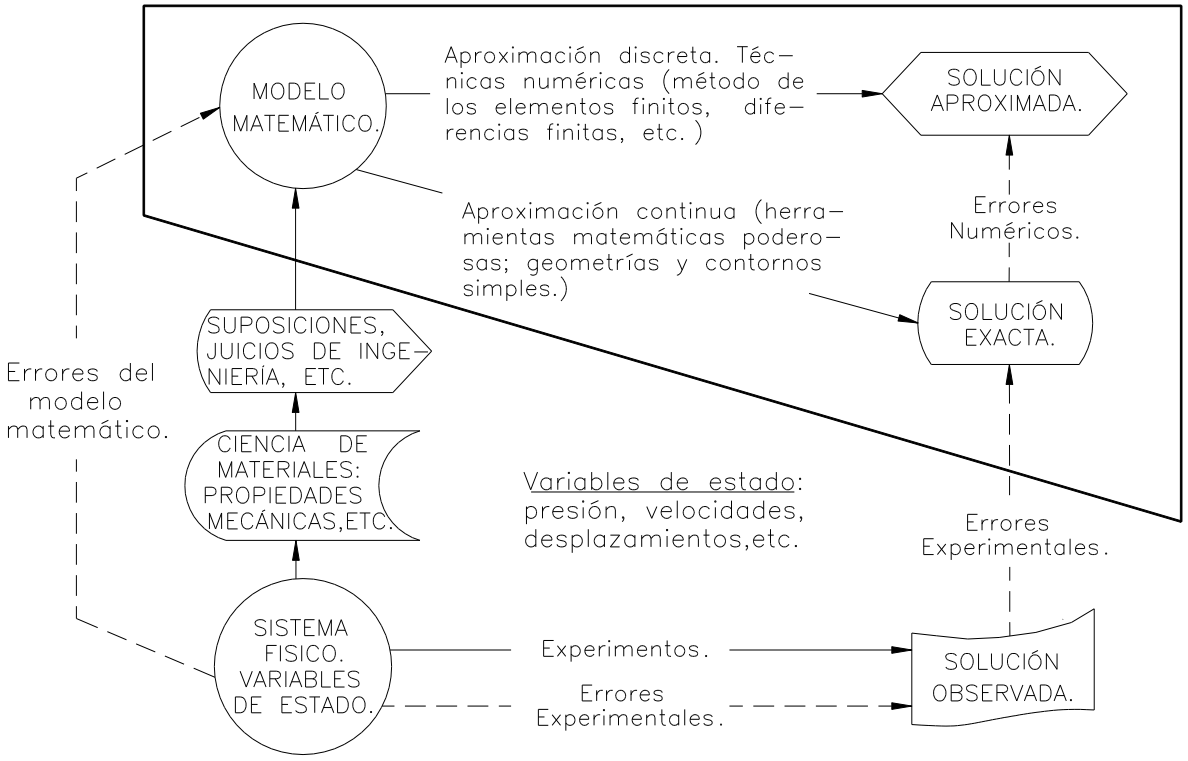


Fig.1.1 Diagrama esquemático del modelaje matemático de un problema.

_____ proceso deductivo / analítico.

----- fuentes de discrepancia: realidad / modelo matemático.

1.2.- Antecedentes Históricos

La idea de representar un dominio mediante un conjunto de elementos discretos, no aparece con el **mef**. En efecto, los antiguos matemáticos usaban "elementos finitos" para predecir el valor de π en forma bastante aproximada. Dicha aproximación la realizaban limitando un círculo con polígonos (inscritos o circunscritos), de tal modo que los segmentos de rectas (elementos finitos), aproximasen la circunferencia del círculo. De este modo, ellos estaban en capacidad de obtener estimaciones muy exactas del valor de π (casi cuarenta dígitos).

Arquímedes (287 a.c.) usó las mismas ideas para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos aunque, por supuesto, no tenía el conocimiento del procedimiento de límite. Realmente, fue sólo éste desconocimiento lo que impidió que Arquímedes descubriera el cálculo integral alrededor de dos mil años antes que lo hicieran Newton y Leibniz. Es importante entonces destacar que, mientras la mayoría de los problemas de la matemática aplicada están descritos en términos de ecuaciones diferenciales, la solución de éstas mediante el **mef**, utiliza ideas que son, en mucho, más viejas que las usadas para establecerlas.

Muchos han sido los investigadores, tanto en el área de la ingeniería, como en el área de la mecánica aplicada que han participado en el desarrollo del **mef**. En 1909, Ritz desarrolló un método muy poderoso con el cual se puede obtener soluciones aproximadas, de problemas

asociados al campo de la mecánica del continuo. En este método, se asume la "forma" de las incógnitas involucradas en el problema, en términos de unas funciones de aproximación conocidas y unos parámetros a determinar. La introducción de estas funciones en el funcional que describe el problema en estudio, y su posterior diferenciación con respecto a los referidos parámetros, produce una ecuación la cual es igualada a cero. Si existen *n* parámetros desconocidos, se formará un sistema de *n* ecuaciones simultáneas. La solución de dicho sistema permite determinar dichos parámetros y, por lo tanto, obtener la solución aproximada del problema. Este método es similar a la estimación de los parámetros de ajuste en los problemas de mínimos cuadrados. La limitación más severa del método de Ritz, está en el hecho que las funciones de aproximación, deben verificar las condiciones de contorno especificadas en el problema en estudio, lo cual restringe la aplicación del método a aquellos problemas con dominios de forma geométrica relativamente simples.

En 1943, Courant hizo una muy significativa extensión del método de Ritz introduciendo funciones seccionalmente continuas, definidas sobre áreas triangulares, lo cual, conjuntamente con el principio de mínima energía potencial, le permitió estudiar problemas de torsión. En estos problemas, las incógnitas se seleccionaron de tal modo que fueran iguales a los valores de las funciones, en los puntos de interconexión de las áreas triangulares. Por otro lado, la limitación del método de Ritz fue eliminada ya que las condiciones de contorno se satisfacen, ahora, en un número finito de puntos sobre el contorno.

El método de Ritz, tal como fue usado por Courant, es idéntico al **mef** el cual fue presentado algunos años después por Clough, a partir de ideas diferentes. En efecto, en 1960, Clough introdujo, por primera vez, el término *elemento finito*, en su trabajo "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis". En este trabajo se presentó el **mef** como una extensión de las técnicas de análisis estructural, en la solución de problemas de la mecánica del continuo.

La razón por la cual el **mef** tuvo una acogida, casi inmediata en 1960, está asociada al gran desarrollo, casi simultáneo, del computador digital, mediante el cual se logra efectuar la gran cantidad de operaciones que el **mef** demanda, en forma rápida y precisa; en 1943 Courant no contaba con esta poderosa herramienta de cálculo.

A mediados de los años 60 los investigadores, tanto del campo de la mecánica del continuo, como del análisis estructural, supieron reconocer que la extensión del método de Ritz propuesta por Courant y el **mef** son, en esencia, idénticos. Este hecho trajo como consecuencia, en los siguientes años, un progreso impresionante de este método. Desde entonces el **mef** se aplica, con éxito, en problemas tridimensionales, en problemas no lineales (geométricos y/o físicos), en problemas no permanentes, y en problemas de muchas otras áreas distintas al análisis estructural tales como, flujo de fluidos, transferencia de calor, análisis de campos eléctricos y magnéticos, robótica, ciencias médicas, etc.

1.3.- Etapas básicas en la utilización del método de los elementos finitos.

Independientemente de la naturaleza física del problema, el análisis del mismo mediante el **mef** sigue los siguientes pasos:

1.- Definición del problema y su dominio.
2.- Discretización del dominio.
3.- Identificación de la(s) variable(s) de estado.
4.- Formulación del problema.
5.- Establecimiento de los sistemas de referencia.

6.- Construcción de las funciones de aproximación de los elementos.
7.- Determinación de las ecuaciones a nivel de cada elemento.
8.- Transformación de coordenadas.
9.- Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos.
10.- Introducción de las condiciones de contorno.
11.- Solución del conjunto de ecuaciones simultáneas resultante.
12.- Interpretación de los resultados.

1.3.1.- Definición del problema y su dominio

El análisis de un problema dado vía el **mef,** tiene implícito tres tipos de aproximación. La primera se relaciona con la definición del dominio (física y geométrica) del problema, las otras dos están asociadas a la discretización de las ecuaciones gobernantes, y a los algoritmos empleados en la solución del sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas resultante.

Las aproximaciones usadas en la definición de las características físicas de las diferentes regiones del dominio, depende fundamentalmente del tipo de problema a resolver. Sin embargo, la definición geométrica del dominio, requiere el establecimiento de ejes *coordenados globales* en referencia a los cuales se describen las coordenadas de ciertos puntos (nodos), los cuales, a su vez, definen las ecuaciones de las líneas, superficies y/o volumen de los elementos. Este sistema coordenado no necesita ser rectangular y cartesiano, para algunos problemas específicos, resulta más adecuado utilizar algún tipo de sistema coordenado curvilíneo.

El dominio puede ser limitado o no (ciertos dominios se extienden hasta el infinito). Para regiones limitadas del dominio, la idealización se realiza mediante elementos finitos y para las partes de la región ilimitadas, se usan *elementos infinitos* o *elementos de contorno.* Muchas veces el dominio entero está constituido de subdominios, como el caso de problemas de interacción. Las condiciones de interfaz entre subdominios deben ser definidas, también, a priori de la discretización.

1.3.2.- Discretización del dominio

Puesto que usualmente el problema está definido sobre un dominio continuo, las ecuaciones gobernantes de un problema, con excepción de las condiciones de contorno, son válidas tanto en todo el dominio como en cualquier parte de él. Esto permite idealizar el dominio a través de regiones de tamaño finito (elementos), interconectados de diferente forma y tamaño, tal como se muestra en la Fig.1.2. Esta forma de discretización introduce ciertas aproximaciones (p.e., corte de las esquinas, líneas curvas por rectas, elementos curvos por planos, etc.). Sin embargo, colocando un número suficiente de elementos (o elementos de orden superior), se podrá reproducir el dominio tan aproximadamente cuanto queramos.

Aun cuando es cierto que, en general, reduciendo el tamaño de los elementos se obtienen mejores resultados, también es cierto que un refinamiento excesivo conduce a grandes sistemas de ecuaciones, lo cual puede tornarse impráctico desde el punto de vista computacional. De tal modo que, inicialmente, se debe entonces responder la siguiente pregunta: ¿ cual es el tipo de elemento más eficiente y cual será el tamaño adecuado?. Una respuesta parcial a esta pregunta viene dada en la literatura bajo la palabra clave de *modelaje*. Algunas técnicas relevantes en la discretización del dominio son los *procesos adaptativos* o *refinamientos de mallas* y *generación automática de mallas*.

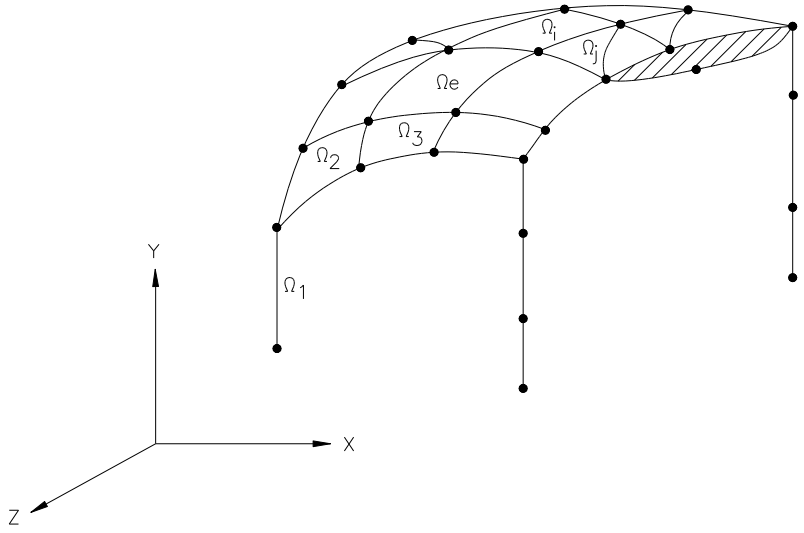


Fig.1.2 Discretización del dominio con diferentes elementos finitos.

1.3.3.- Identificación de la(s) variable(s) de estado

Hasta el momento no se ha hecho referencia a la naturaleza física del problema ya que las etapas anteriores son comunes a cualquier tipo de problema, ya sea éste de transferencia de calor, de la mecánica de los fluidos, de la mecánica de los sólidos, etc. A continuación, y para cada problema en particular, la descripción matemática del fenómeno físico conducirá al correspondiente problema de valor de contorno, el cual contendrá las variables de estado asociadas al mismo. Estas variables se relacionarán entre sí a través de las *ecuaciones constitutivas*, las cuales representan una expresión matemática de una ley física en particular. La Tabla 1.1 muestra varios problemas con las variables de estado asociadas, y las correspondientes ecuaciones constitutivas. Muchos problemas reales involucra el análisis de dos o más tipos de problemas mostrados en dicha tabla, de modo conjunto y simultáneo.

1.3.4.- Formulación del problema

Frecuentemente, un problema físico está formulado a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales con sus correspondientes condiciones de contorno, o mediante una ecuación integral (un funcional) sujeto a un requerimiento estacionario (máximo o mínimo). En el primer caso se dice que el problema físico está referido a su *forma diferencial* y en el segundo, a su *forma variacional*. En ambos casos se llega al mismo resultado. En este texto se presentarán las dos formulaciones como forma de establecer las ecuaciones de los elementos.

1.3.5.- Establecimiento de los sistemas de referencia

Además de los ejes globales de referencia del sistema completo, existen dos importantes razones para seleccionar, adicionalmente, un sistema de referencia local para los elementos: la facilidad con la que se construyen las llamadas funciones de forma de los elementos y la facilidad con la que se integra en el interior de los mismos, con respecto al sistema local de cada elemento en particular. Sin embargo, puesto que los elementos se ensamblan en el sistema global de referencia, este paso introduce una *transformación de coordenadas.*

Tabla 1.1 Descripción matemática de varios problemas de valor de contorno.

Problema físico	Principio de conservación	Variable de estado	Flujo	Constantes del material	Fuente	Ecuación constitutiva
deformación de un cuerpo elástico	equilibrio de fuerzas	desplazamientos o fuerzas	esfuerzos o deformaciones	módulo elástico, coeficiente de Poisson	fuerzas de volumen o de superficie	ley de Hooke
redes eléctricas	equilibrio de corrientes	voltaje o amperios	flujo eléctrico	conductividad eléctrica	carga eléctrica externa	ley de Kirchoff
torsión	conservación de la energía potencial	función de esfuerzos o de alabeo	tasa de giro	corte	−2*ángulo de giro	ley de Hooke
transferencia de calor	conservación de la energía	temperatura	flujo de calor	conductividad térmica	calor externo o interno	ley de Fourier
flujo de fluidos	conservación del momentum	velocidades	esfuerzos cortantes	viscosidad	fuerzas de volumen	ley de Stokes
flujo a través de medios porosos	conservación de la masa	altura hidrostática	tasa de flujo	permeabilidad	fuentes del fluido	ley de Darcy
electrostática	conservación del fluido eléctrico	potencial eléctrico	flujo eléctrico	inducción eléctrica	carga	ley de Coulomb
magnetostática	conservación del potencial magnético	potencial magnético	flujo magnético	permeabilidad magnética	corriente	ley de Maxwell

A pesar que todos los cálculos en el **mef** se pueden realizar directamente en el sistema global, este procedimiento es muy complicado para cualquier problema de interés práctico y, puesto que la transformación de coordenadas entre cualesquiera dos sistemas coordenados está bien definida y es una operación matemáticamente sencilla, se deben deducir las ecuaciones de los elementos con relación a su sistema local de referencia el cual puede ser cartesiano o curvilíneo, dependiendo de la forma de un elemento dado. En la Fig.1.3 se muestra un elemento bidimensional y los sistemas global y local de referencia.

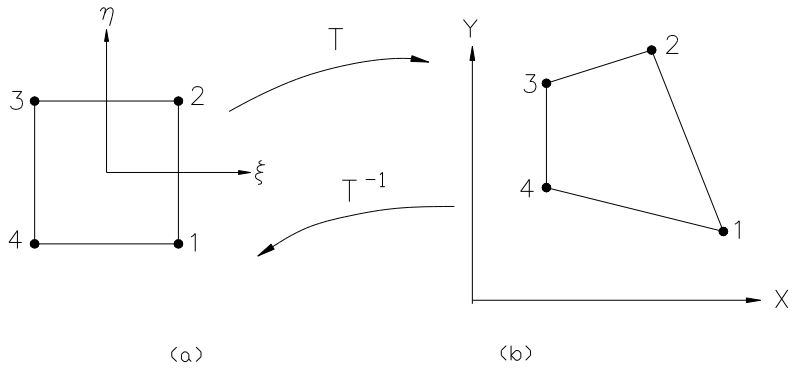


Fig.1.3 Sistemas de referencia usados en el método de los elementos finitos.
(a) Sistema local de referencia; (b) Sistema global de referencia.

1.3.6.- Construcción de las funciones de aproximación de los elementos

Una vez que se han seleccionado el sistema coordenado local y la(s) variable(s) de estado, éstas pueden ser aproximadas de diferentes formas. En el **mef**, la aproximación tanto del dominio del problema como de las variables involucradas en el mismo, se realiza mediante funciones algebraicas. Si el elemento es plano o de lados rectos, las coordenadas de los nodos primarios (los

que están localizados en los extremos de los elementos), definirán la forma exacta del mismo. Debido a esto, la discretización del dominio muchas veces se realiza mediante elementos de lados rectos. Sin embargo, para algunos problemas estos elementos (p.e., elementos planos utilizados en la discretización de cáscaras), pueden producir errores inaceptables y la discretización debe ser realizada con elementos de orden superior, como los que se muestran en la Fig.1.4.

Un argumento similar es válido para la aproximación de la(s) variable(s) de estado. Estas pueden aproximarse mediante una función lineal o a través de funciones de orden superior (i.e., cuadráticas, cúbicas, etc.). El analista debe decidir si la aproximación *física* (variable(s) de estado) y la aproximación *geométrica* (forma del elemento), tendrán el mismo orden, o si por el contrario dará preferencia a una sobre la otra en todo el dominio, o en alguna parte del mismo. Esto conduce a tres diferentes categorías de elementos. Si m y n representan dos grados de aproximación distintos para la forma de los elementos y para la(s) variable(s) de estado, respectivamente, se dice que un elemento es: (a) subparamétrico si $m < n$; (b) isoparamétrico si $m = n$; (c) superparamétrico si $m > n$. La Fig.1.4 muestra ejemplos de estas tres categorías de elementos.

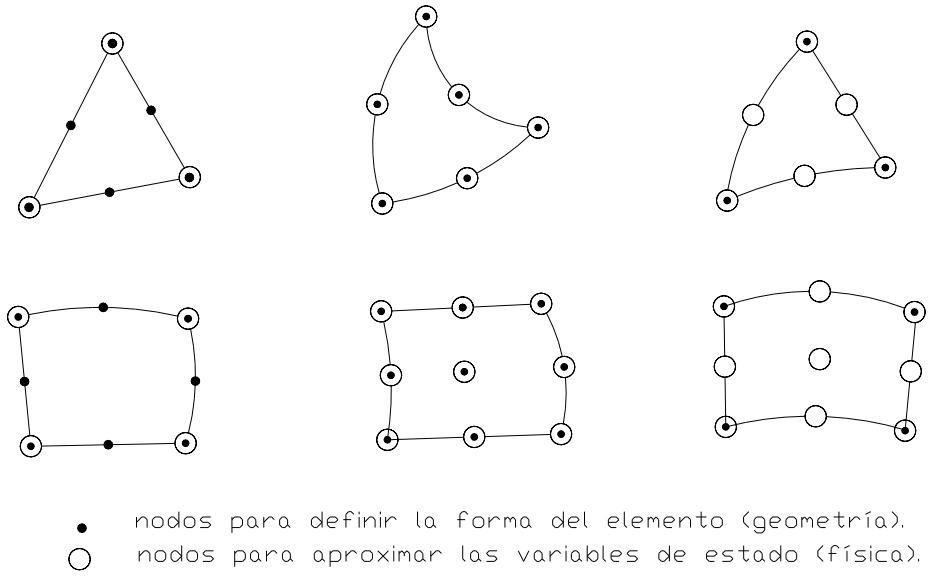


Fig.1.4 Ejemplos de elementos finitos subparamétricos, isoparamétricos y superparamétricos.

1.3.7.- Determinación de las ecuaciones a nivel de cada elemento

A esta altura el modelaje del problema (i.e., la formulación y discretización del dominio con los elementos de forma y funciones deseadas), se ha completado. Usando algún modelo matemático (método de residuos pesados, trabajo virtual, métodos de energía, etc.), se debe establecer, a continuación, sobre cada elemento, las ecuaciones discretas del problema continuo. Este paso involucra la determinación de la llamada *matriz de rigidez* de cada elemento con respecto a su sistema local de referencia. Esta matriz relaciona, por ejemplo, en el caso de un problema de la mecánica de los sólidos, los desplazamientos nodales con las fuerzas nodales o, en el caso de un problema de conducción de calor, la temperatura con el flujo de calor. Este paso involucra la consideración de las ecuaciones constitutivas y, generalmente, el uso de la integración numérica.

1.3.8.- Transformación de coordenadas

Una vez determinadas las matrices de rigidez de todos los elementos que conforman la discretización del dominio del problema, y antes de proceder al ensamblaje de todas estas matrices, para así obtener el comportamiento de todo el sistema, es necesario realizar la transformación de coordenadas, que permita transformar las matrices de rigidez de los elementos, desde sus respectivos ejes coordenados locales, al sistema global de referencia.

1.3.9.- Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos

El ensamblaje de las matrices de las ecuaciones de los elementos, se realiza de acuerdo con la configuración topológica de los mismos, después que éstas han sido transformadas al sistema global de referencia. Dicha configuración se obtiene a través del establecimiento de una relación entre la numeración local de los nodos de los elementos, y la numeración global de los mismos. El ensamblaje se efectúa considerando únicamente los nodos de las interfaces, los cuales son comunes a los elementos adyacentes. La matriz resultante se denomina *matriz global del sistema*.

1.3.10.- Introducción de las condiciones de contorno

En este paso se introducen las condiciones de contorno en la matriz global del sistema, con lo cual esta matriz se podrá reducir o condensar a su forma final, aun cuando en algunos casos se prefiere, para no añadir nuevos algoritmos a la solución del problema, dejar el sistema global con su tamaño inicial. Existen algunos algoritmos más refinados que permiten introducir las condiciones de contorno en el paso anterior (i.e., durante el ensamblaje), con lo cual se reduce tanto el tiempo de ejecución como la memoria requerida, pero dichos algoritmos requieren una programación muy diestra.

Los valores prescritos (conocidos) de la función (o el de sus derivadas) en los contornos, son las llamadas *condiciones de contorno esenciales*. Usualmente, estos valores son cero o constantes (equivalente a especificar los desplazamientos, las velocidades, la temperatura, etc., en los nodos), o como una función de la carga (en el caso de soportes elásticos que aparecen en algunos problemas de la mecánica de los sólidos).

1.3.11.- Solución del sistema de ecuaciones resultante

Independientemente de la naturaleza del problema, el paso final en la solución de un problema mediante el **mef,** lo constituye la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas resultante. Debido a la naturaleza determinística del **mef**, los procedimientos de solución de dichos sistemas se pueden clasificar en dos grupos: (a) los *métodos directos*, tales como los métodos de Gauss y de factorización de Cholesky, los cuales son los más utilizados para sistemas de ecuaciones pequeños o moderados y (b) los *métodos iterativos*, tales como los métodos de Gauss-Seidel y el de Jacobi, los cuales a su vez, son más apropiados para sistemas de grandes órdenes. En estos métodos, el tiempo de solución es considerablemente menor que en los métodos directos. Sin embargo, no son adecuados en problemas con múltiples sistemas de cargas, como los que frecuentemente se encuentran en la mecánica de los sólidos. Cuando el sistema de ecuaciones es *no-lineal*, los procedimientos de solución más utilizados son el método de Picard,

el método de Newton-Raphson y variaciones del método de Newton (Broyden, quasi-Newton, etc.).

1.3.12.- Interpretación de los resultados

Con la resolución del sistema de ecuaciones se obtienen los valores aproximados de la(s) variable(s) en los puntos discretos (nodos) del dominio. Generalmente, estos valores son interpretados y usados en el cálculo de otras cantidades físicas, tales como los esfuerzos, deformaciones, el flujo de calor, etc., en todo el dominio, o en ciertas partes del mismo. Estos cálculos posteriores se conocen con el nombre de *pos-procesamiento*.

La comparación de los resultados obtenidos con la evidencia experimental u otros resultados numéricos es, tal vez, una de las tareas más importantes del **mef,** ya que debe darse respuesta a las siguientes preguntas: Cuan buenos son los resultados?. Qué hacer con ellos?. La respuesta a la primera requiere de la estimación del error y la segunda involucra la naturaleza física del problema. Las respuestas a estas preguntas permitirán decidir si el análisis ha llegado a su fin, o si por el contrario, se requiere la repetición de algunos de los pasos descritos. En algunos casos, el nuevo análisis comienza en el mismo paso 1 (i.e., redefinición del problema con nuevos parámetros físicos, nueva discretización con diferentes tipos y formas de elementos, etc.). Sin embargo, en la práctica, para la mayoría de los problemas, se obtienen resultados confiables comparando diferentes análisis (basados en diferentes discretizaciones), del mismo problema. Los procesos *adaptativos* y *la generación automática de mallas* permiten, automáticamente, incrementar la exactitud de un problema dado, una vez estimado el error del análisis inicial.

Estos doce puntos completan los pasos necesarios para el análisis de un sistema mediante el **mef**. Estos conceptos básicos serán ahora introducidos a través del siguiente ejemplo.

1.4.-Ejemplo 1.1. Determinación del valor de π

Considérese el problema de determinar el valor de π. Para tal fin se limitará un círculo de radio R, mediante un polígono inscrito (o circunscrito), de *n* lados, de tal modo que los lados del polígono aproximen la circunferencia del círculo, tal como se muestra en la Fig.e1.1.

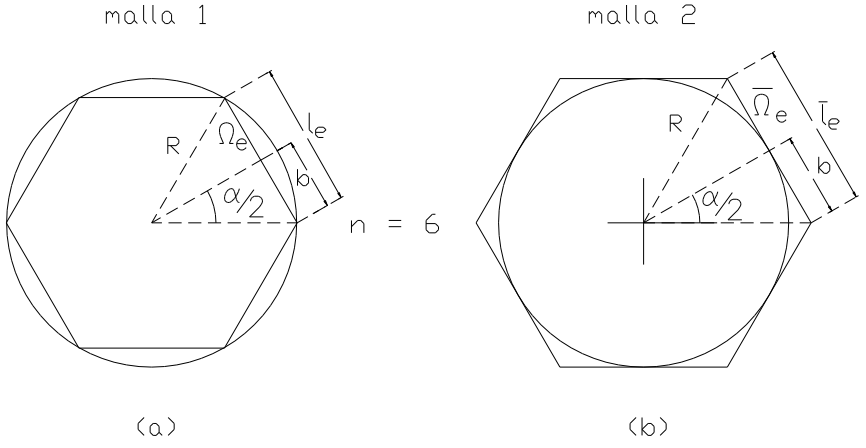


Fig.e1.1 Discretización del dominio. (a) Polígono inscrito.
(b) Polígono circunscrito.

Supóngase que se puede determinar la longitud de cada uno de los lados del polígono. El perímetro aproximado de la circunferencia será, entonces, la suma de los lados del polígono usado en su representación, a partir de lo cual se puede estimar el valor de π. A pesar de lo trivial del ejemplo, su análisis permitirá ilustrar varias (aunque no todas) ideas del **mef** y los pasos en él involucrados.

a.- Discretización del dominio

Como ya se mencionó, en primer lugar se representa la región continua (i.e., la circunferencia), por un conjunto finito de *n* sub-regiones (elementos finitos), que en este caso son los segmentios de recta que representan cada lado del polígono. El conjunto de elementos se denomina *malla de elementos finitos* o simplemente *malla.* En este ejemplo se utilizó una malla de seis (n = 6) segmentos de recta y se analizaron dos discretizaciones diferentes, tal como se muestra en la Fig.e1.1. Puesto que todos los elementos tienen el mismo tamaño (no necesariamente siempre es así), la malla se dice *uniforme.*

b.- Ecuaciones de los elementos

A continuación se aísla un elemento típico (p.e., el lado Ω_e o $\overline{\Omega}_e$), y se calculan sus propiedades (en este caso, su longitud). Es aquí cuando se usa, a nivel de cada elemento genérico Ω_e, la *ecuación que gobierna el problema* para determinar la propiedad requerida (en este caso, la longitud del elemento).

Sea, entonces l_e la longitud del elemento Ω_e en la *malla 1* y sea $\bar{l}_e$ la longitud del elemento $\overline{\Omega}_e$, en la *malla 2*. Luego, se tendrá:

$$l_e = 2R\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n} \qquad\qquad \bar{l}_e = 2R\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$$

c.- Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos finitos del problema

El perímetro aproximado P de la circunferencia, se obtiene ensamblando, "sumando", la contribución de cada uno de los elementos que componen la malla. En este caso, el ensamblaje está basado en que la suma de la longitud de cada elemento, es igual a la longitud total del ensamblaje; es decir:

$$P_1 = \sum_{e=1}^{n} l_e \qquad\qquad P_2 = \sum_{e=1}^{n} \bar{l}_e$$

Puesto que en este caso la malla es uniforme, l_e o $\bar{l}_e$ es igual para cada uno de los elementos de la malla y por lo tanto se tiene:

$$P_1^{(n)} = 2nR\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n} \qquad\qquad P_2^{(n)} = 2nR\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$$

Se debe notar que en un caso general, el ensamblaje de los elementos está basado en la idea que la solución es continua en los contornos inter-elementos. En el ejemplo anterior, las condiciones de continuidad no se presentan ya que las ecuaciones usadas son algebraicas. Adicionalmente, el ensamblaje de los elementos está sujeto a condiciones de contorno y/o iniciales. Las ecuaciones discretas asociadas con la malla de elementos finitos, se resuelven sólo después de introducir dichas condiciones. En este caso, por la misma razón anterior, tampoco se presentan dichas condiciones.

d.- Convergencia de la solución

La *convergencia* de la solución de un problema vía el **mef**, depende de la ecuación diferencial a resolver y del elemento usado. La palabra convergencia se refiere a la *exactitud* (diferencia entre la solución exacta y la solución **mef**), cuando se incrementa el número de elementos. En este caso, es fácil mostrar que en el límite, cuando $n \to \infty$, $\frac{P_1^{(n)}}{2R} \to \pi$ y, del mismo modo, $\frac{P_2^{(n)}}{2R} \to \pi$. En efecto, sea $x = 1/n$, luego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_1^{(n)}}{2R} = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} = \pi$$

De igual modo, sea $y = 1/n$, luego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_2^{(n)}}{2R} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg}\pi y}{\pi y} = \pi$$

La Fig.e1.2 muestra la convergencia de la solución de ambas discretizaciones a medida que $n \to \infty$.

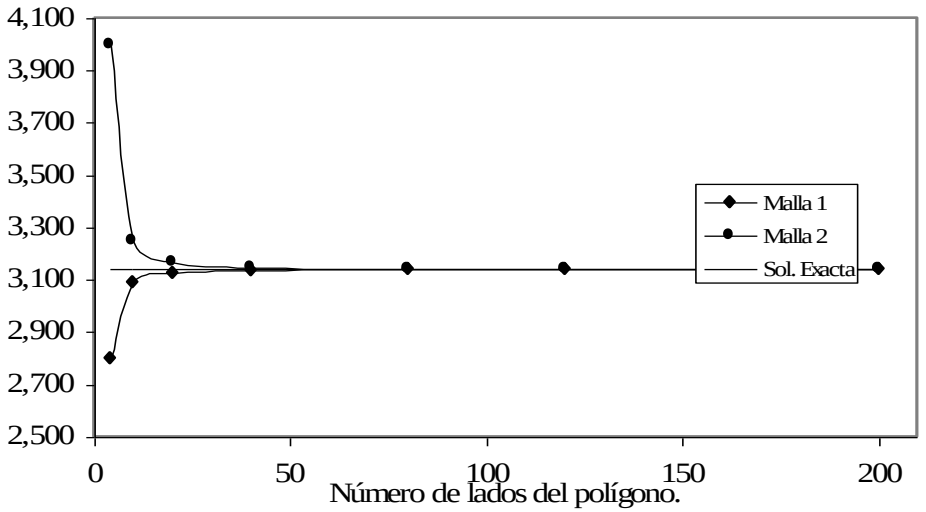


Fig.e1.2 Convergencia de la solución del valor de π.

Finalmente, se debe notar que de las tres posibles fuentes de error presentes en la solución de un problema mediante el **mef**: (1) errores debido a la aproximación del dominio; (2) errores debido a la aproximación de la solución; (3) errores debido al cálculo numérico (p.e, errores debido a la integración numérica, redondeo, etc.), en este ejemplo, únicamente está presente el primer tipo de error. La estimación de estos errores, en general, no es una tarea fácil.

1.5.- Implementación computacional del método de los elementos finitos

La implementación computacional de los pasos descritos en la sección anterior se realiza, en forma general, a través de tres unidades básicas: el *pre-procesador*, el *procesador*, y el *pos-procesador*. Las funciones principales de estas unidades son, respectivamente, (1) entrada y/o generación de los parámetros del problema, (2) ensamblaje y resolución del sistema de ecuaciones y (3) impresión y graficación de la solución. El éxito de cualquier programa computacional de elementos finitos, depende de la eficiencia de cada una de las tres unidades mencionadas. En la Fig.1.5 se resume las operaciones que se realizan en dichas unidades.

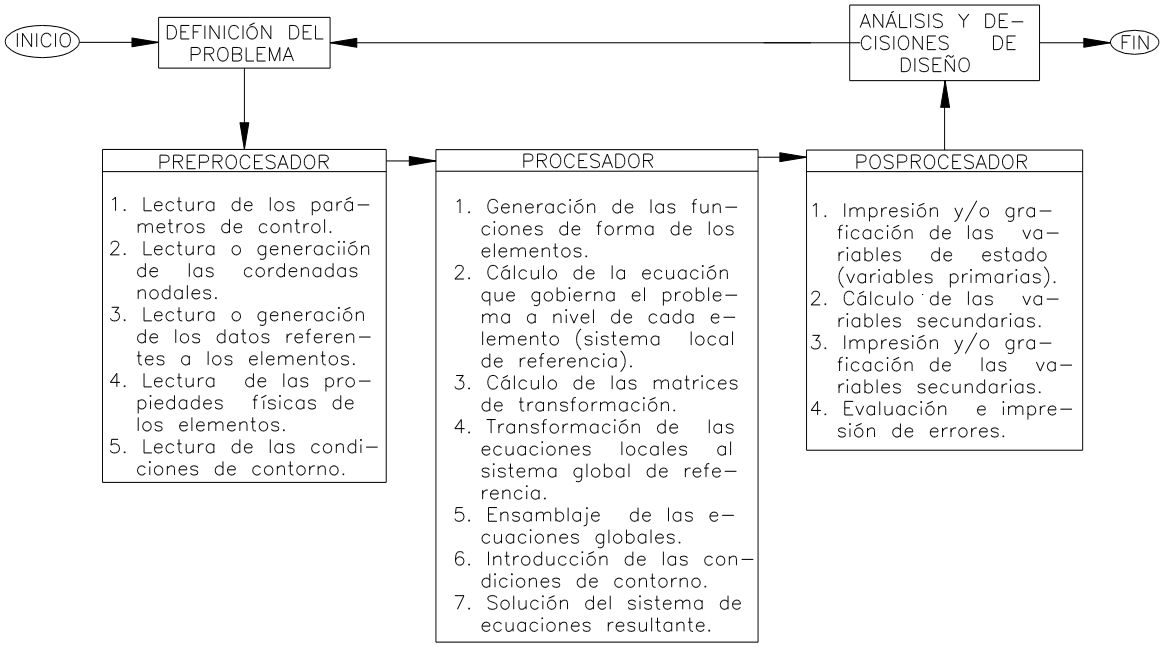


Fig.1.5 Esquema general de la implementación computacional del método de los elementos finitos.

1.6.- Métodos y formulaciones de las ecuaciones de los elementos finitos

Como ya se ha mencionado, el **mef** consiste en el reemplazo de un conjunto de ecuaciones diferenciales, por un conjunto equivalente, pero aproximado, de ecuaciones algebraicas, donde cada una de las variables es evaluada en los puntos nodales. En la evaluación de estas ecuaciones algebraicas pueden usarse diferentes tipos de aproximaciones, y los *métodos de elementos finitos* se clasifican, usualmente, de acuerdo al método usado. Desafortunadamente, no existe un método en particular que sea apropiado para todos los tipos de problemas encontrados en la práctica, de tal modo que deben examinarse diferentes métodos para poder seleccionar el más conveniente para un problema dado.

En este texto se analizarán tres métodos: el directo, el variacional y los residuales. Existen otros, menos comunes, pero escapan al objetivo primario de dicho texto.

1.6.1.- El método directo

El **mef** se desarrolló, al inicio de la década de los años cincuenta, a partir del llamado método directo asociado al cálculo estructural, el cual fue ampliamente usado en la solución de diversos problemas estructurales relacionados con la industria aeronáutica. Mediante este método se analizaron elementos estructurales reticulares. Las relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas que los originan, se expresaron mediante un conjunto de ecuaciones, dando origen a lo que se dio en llamar *matriz de rigidez* de cada elemento estructural, y se desarrollaron técnicas para realizar el ensamblaje de estas matrices en una matriz global, que expresara el comportamiento de toda la estructura en estudio. Prácticamente, todos los parámetros empleados en esta aproximación pueden interpretarse mediante principios físicos. Desafortunadamente, este método es difícil de aplicar en problemas bidimensionales y tridimensionales, los cuales son, precisamente, los casos donde el **mef** es más útil. Esta limitación es por lo tanto muy severa y reduce, drásticamente, su rango de aplicación.

1.6.2.- El método variacional

El método variacional está relacionado con un ente matemático llamado funcional. El funcional asociado a un problema dado, puede obtenerse bien sea a partir de alguna expresión de energía (usualmente este es el caso en los problemas de la mecánica de los sólidos), o desde un problema de valor de contorno. Una vez obtenido el funcional asociado a un problema dado, el método variacional consiste en minimizar el valor del funcional con respecto a cada uno de los valores nodales de la(s) variable(s) del problema.

Entre las ventajas de este método se incluye la familiaridad de las técnicas de energía (en problemas de la mecánica de los sólidos), y su fácil extensión a problemas bidimensionales y tridimensionales. Entre las desventajas, se incluye la inexistencia del funcional para cierta clase de problemas (p.e., los relacionados con el flujo de fluidos viscoelásticos), y la dificultad de determinarlo, aun cuando exista, para otros problemas. La inexistencia del funcional para algunos problemas, obliga a que se deba recurrir a otros métodos.

1.6.3.- El método de los residuos pesados

El método de los residuos pesados es el más general de las tres técnicas. Este método está asociado al problema de valor de contorno de un problema dado, y consiste en re-escribir la ecuación diferencial que gobierna el problema, de tal modo que el lado derecho del signo de igualdad sea igual a cero. De este modo, cuando se substituye la solución exacta en esta ecuación, el resultado será, lógicamente, igual a cero. Pero debido a que en general la solución exacta no se conoce, se debe emplear alguna solución aproximada. La sustitución de esta solución aproximada en la ecuación diferencial, conduce a un error residual r, distinto de cero. Este error r es entonces multiplicado por una función de peso W y el producto es integrado sobre toda la región del dominio. El resultado es el error residual R, el cual debe hacerse igual a cero. Luego, para cada valor nodal, existe una función peso W y un residuo R, ambos desconocidos, lo cual permite formular un conjunto de ecuaciones algebraicas globales. La selección de las funciones peso W

da origen a diferentes criterios de residuos pesados (Galerkin, mínimos cuadrados, colocación, subdominio). El más ampliamente usado es el método de Galerkin.

A pesar que el método de los residuos pesados es una aproximación netamente matemática, y que muy pocas veces se le puede asociar algún significado físico a los parámetros involucrados en la solución de un problema dado, presenta la ventaja que puede aplicarse a cualquier problema del cual se conozca su respectivo problema de valor de contorno y que, una vez que se entiende la técnica, los detalles matemáticos son relativamente fáciles de realizar. En particular, en el área de la mecánica de los fluidos, este método es usado en casi la totalidad de los problemas, ya que las ecuaciones de Navier-Stokes y algunas relaciones constitutivas, tales como las asociadas a los fluidos viscoelásticos, no admiten funcionales.

1.7.- Modelos de elementos finitos en la mecánica de los sólidos

En la solución de los problemas asociados a la mecánica de los sólidos se pueden emplear diferentes modelos de elementos finitos, los cuales dependen del principio variacional utilizado y del tipo de comportamiento localizado de las variables sobre cada elemento. Los tres principios variacionales más frecuentemente utilizados son: el *principio de mínima energía potencial*, el *principio de mínima energía complementaria* y el *principio de Reissner*. La(s) variable(s) involucrada(s) en un problema dado dictaminan el principio variacional a usarse.

Cuando se utiliza el principio de mínima energía potencial, se debe asumir la forma de los desplazamientos en el interior de cada elemento. Por este motivo, este modelo recibe el nombre de *modelo de elementos finitos de desplazamientos*, o *modelo compatible*.

Cuando se usa el principio de mínima energía complementaria, se supone la forma del campo de esfuerzos y por este motivo a este modelo se le conoce con el nombre de *modelo de elementos finitos de las fuerzas*, o *modelo de equilibrio.*

El principio de Reissner permite el desarrollo de los llamados *modelo de elementos finitos híbridos y del modelo mixto.* En estos modelos se adoptan simultáneamente, los campos de desplazamientos y de esfuerzos.

Para un problema en particular, un principio puede ser más apropiado que otro pero, debido a su fácil implementación, el modelo compatible es el más ampliamente usado, motivo por el cual constituye la base de la mayoría de los programas computacionales comerciales en el área de la ingeniería. En este texto, únicamente se abordarán los aspectos teóricos y computacionales de este modelo. Sin embargo, es importante resaltar que muchos de los conceptos que serán presentados, y en particular las técnicas computacionales utilizadas en la implementación del mismo son, en muchos casos, directamente aplicables a los otros modelos descritos. En la Tabla 1.2 se resumen los modelos de elementos finitos descritos.

1.8.- Modelos de elementos finitos en la mecánica de los fluidos

En la mayoría de los problemas relacionados con la mecánica de los fluidos, es muy difícil o imposible formular la solución de los mismos a través de algún principio variacional, ya que como se dijo anteriormente, las ecuaciones de Navier-Stokes y algunas relaciones constitutivas, no admiten funcionales. Así que, en esta área, el método de los residuos pesados es el más ampliamente usados. En particular, en la solución de los problemas de fluidos viscosos y viscoelásticos, los dos modelos de elementos finitos más usados son: el *modelo U-V-P* y el *modelo Penalty.*

En el modelo U-V-P, se resuelven simultáneamente, las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento. Las incógnitas primarias presentes son las componentes de la velocidad y la presión. La principal ventaja de este modelo radica en que la presión, debido a que es una incógnita primaria, se obtiene directamente de la solución del sistema de ecuaciones algebraico resultante de la discretización. Sin embargo, debido a que la presión y las componentes de la velocidad requieren diferentes grados de aproximación, el algoritmo del montaje de la matriz global del sistema de ecuaciones se hace muy complicado. Adicionalmente, debido a la presencia de ceros en la diagonal principal de la matriz global del sistema, dicho sistema no es positivo definido, por lo que el método de solución del sistema de ecuaciones algebraico resultante, debe incluir la técnica de pivoteo. Un forma de contornar estas dificultades es a través del modelo Penalty.

Tabla1.2 Modelos de elementos finitos usados en la mecánica de los sólidos.

Modelo	Principio variacional	Variable supuesta en el interior de cada elemento	Variable supuesta en los contornos inter–elementos	Incógnitas en las ecuaciones finales
compatible	mínima energía potencial	desplazamientos continuos	compatibilidad de desplazamientos	desplazamientos nodales
equilibrio	mínima energía complementaria	esfuerzos continuos en equilibrio	equilibrio de las tracciones	esfuerzos nodales
híbrido I	energía complementaria modificada	esfuerzos continuos en equilibrio	compatibilidad de desplazamientos	desplazamientos nodales
híbrido II	energía complementaria modificada	desplazamientos continuos	equilibrio de las tracciones	desplazamientos y fuerzas nodales
híbrido III	energía poten–cial modificada	desplazamientos continuos	desplazamientos y fuerzas	desplazamientos nodales
mixto	principio de Reissner	desplazamientos y esfuerzos continuos	diferentes combina–ciones de despla–zamientos y fuerzas	diferentes combina–ciones de despla–zamientos y fuerzas

II.- FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS VÍA EL MÉTODO DIRECTO

2.1.- Introducción

El método directo puede verse como una extensión del *método de rigidez*, ampliamente usado en el análisis estructural, motivo por el cual es conveniente iniciar el estudio de los conceptos esenciales de esta formulación, considerando ejemplos sencillos de dicho análisis. Este enfoque tiene la ventaja de poder presentar los aspectos fundamentales del **mef** sin mucha manipulación matemática, con lo cual se puede lograr un "sentimiento intuitivo" de dicho método, antes de abordar tópicos más avanzados del mismo. Así, en la formulación de estos primeros ejemplos, apenas se hará uso de algunos razonamientos físicos mediante los cuales se establecerán las ecuaciones de los elementos (previamente seleccionados), en términos de las variables asociadas al problema. Luego, combinando estas ecuaciones, se formarán las ecuaciones globales que habrán de expresar el comportamiento de todo el sistema. Debido a esto, este método también recibe el nombre de "aproximación directa" del **mef**.

A pesar que el método directo permite una interpretación clara y fácil del **mef** , su utilidad está severamente limitada ya que es difícil o imposible de aplicar cuando se utilizan elementos complejos y/o se analizan problemas complicados. En estos casos se debe considerar los fundamentos matemáticos del **mef**.

2.2.- Resorte elástico-lineal

Uno de los elementos más simples que puede examinarse desde el punto de vista del **mef**, es el sistema formado por resortes lineales. En la Fig.2.1 se muestra un resorte elástico-lineal, el cual obedece la ley de Hooke; es decir, si una fuerza f está aplicada en el extremo libre del resorte y produce un desplazamiento δ, entonces existirá una relación fuerza-desplazamiento, la cual es lineal y está dada por:

$$f = \kappa\delta \tag{2.1}$$

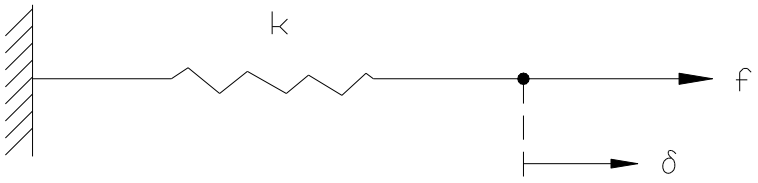


Fig.2.1 Un resorte lineal con un extremo fijo y una fuerza aplicada en su extremo libre.

En esta ecuación, κ es la *rigidez* del resorte. El resorte de la Fig.2.1 está fijo en un extremo y sólo puede tener el desplazamiento indicado en dicha figura.

Considérese ahora un resorte elástico-lineal, de extremos *i* y *j*, el cual forma parte de un sistema de resortes (en equilibrio), tal como se muestra en la Fig.2.2. En este caso, debido a la acción de los resortes adyacentes, actuarán las fuerzas $f_1 y\ f_2$ en los extremos del resorte, siendo δ_1 y δ_2 los correspondientes desplazamientos. Los extremos *i* y *j* del resorte son los nodos del

"elemento resorte", y los desplazamientos de cada nodo se denominan, en general, *grados de libertad.*

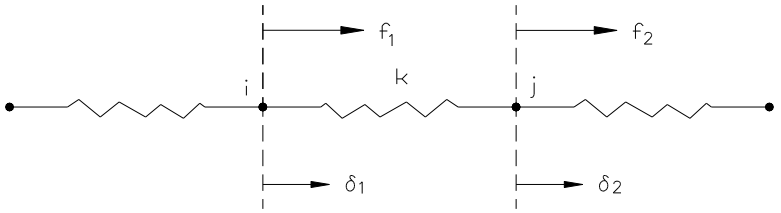


Fig.2.2 Un resorte lineal típico en un sistema de resortes.

Del equilibrio de fuerzas sobre el resorte, se tiene:

$$f_1 + f_2 = 0 \tag{2.2}$$

es decir,

$$f_1 = -f_2 \tag{2.3}$$

Puesto que el nodo *i* se desplazó una distancia δ_1 y el nodo *j* se desplazó una distancia δ_2, la elongación total del resorte es $\delta_2 - \delta_1$, y por lo tanto este resorte se comporta exactamente igual al resorte de la Fig.2.1, con una fuerza f_2 y un desplazamiento $\delta_2 - \delta_1$. Luego,

$$f_2 = \kappa(\delta_2 - \delta_1) \tag{2.4}$$

de modo que:

$$f_1 = \kappa(\delta_1 - \delta_2) \tag{2.5}$$

En notación matricial, estas ecuaciones pueden escribirse del siguiente modo:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & -\kappa \\ -k & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

o, en forma compacta:

$$\{f\} = [\kappa]\{\delta\} \tag{2.7}$$

Los índices *i* y *j* de los elementos de la matriz de rigidez $[\kappa]$, κ_{ij}, denotan la localización de cada coeficiente de rigidez en la i-ésima fila y la j-ésima columna de dicha matriz. Esta matriz (cuadrada), es conocida con el nombre de *matriz de rigidez* del elemento (en este caso, el resorte), el vector $\{\delta\}$ es el vector de desplazamientos nodales y el vector $\{f\}$ es el vector de fuerzas nodales del elemento.

A pesar que la ec.(2.6) se dedujo para uno de los elementos más simples que se puede pensar, ésta posee, sin embargo, muchas de las propiedades que aparecen en los elementos más complejos. Su forma permanece inalterable independientemente del tipo del problema, la complejidad del elemento o la forma en la cual se deducen las propiedades de los elementos.

En este ejemplo, la ley de Hooke permitió determinar los valores exactos de los coeficientes de rigidez de la matriz de rigidez $[\kappa]$, pero en situaciones más complejas, los coeficientes de rigidez solo podrán determinarse en forma aproximada. Independientemente de como se determinen estos coeficientes (en forma exacta o aproximada), su interpretación es la misma: un coeficiente típico κ_{ij}, se define como la fuerza requerida en el nodo *i* para producir un desplazamiento unitario en el nodo *j*, suponiendo que todos los demás desplazamientos son iguales a cero. Esta definición es consistente ya que en cada nodo sólo existe una fuerza y un desplazamiento.

2.3.- Elementos simples de la mecánica estructural

La idea de modelar una estructura como una serie de elementos comenzó como una extensión de los métodos tradicionales usados en el análisis de estructuras reticulares tales como armaduras, pórticos, etc. Estas estructuras están formadas por barras interconectadas únicamente en los nodos, a través de los cuales se transmiten las fuerzas. De modo que es natural ver estas estructuras como un ensamblado de componentes (elementos) individuales. Las relaciones fuerza-desplazamiento de cada uno de estos elementos, se determinan del mismo modo que en el ejemplo anterior.

2.3.1.- Elemento unidimensional sometido a carga axial

Como una aplicación inmediata del resorte elástico-lineal discutido anteriormente, surge el elemento estructural de eje recto, el cual está sometido únicamente a carga axial. El análisis de este tipo de elemento, proporciona un buen punto de partida para mostrar como el método directo es usado en la determinación de la matriz de rigidez de un elemento estructural.

Considérese el elemento axial, en su *sistema local de referencia* (x_m), mostrado en la Fig.2.3. En cada nodo sólo actúan una fuerza y un desplazamiento, con lo cual se tiene un único *grado de libertad* por nodo.

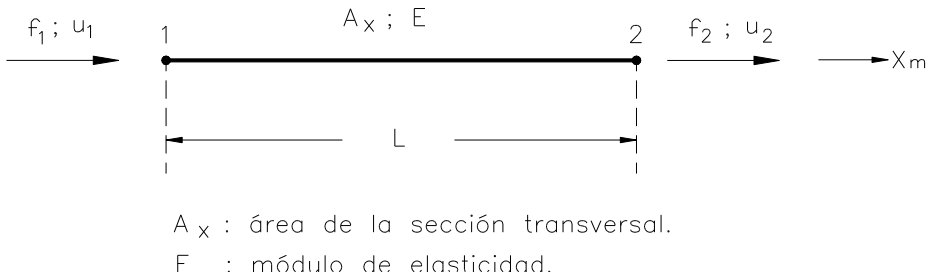


Fig.2.3 Elemento unidimensional uniforme sometido a carga axial.

En total, el elemento tendrá dos grados de libertad, por lo que se necesitan dos ecuaciones para describir las características de fuerza-deformación. En notación matricial, estas ecuaciones tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

o, igual que antes:

$$[\kappa]\{\delta\} = \{f\}$$

donde: $[\kappa]$es la matriz de rigidez, $\{\delta\}$ es el vector de desplazamientos nodales y $\{f\}$ es el vector de fuerzas nodales.

De la propia definición de los coeficientes de rigidez κ_{ij} y recordando, de la teoría básica de la mecánica de los sólidos, que el desplazamiento del extremo libre de un elemento uniforme, sometido a carga axial viene dado por $u = {}^{FL}\!/_{A_x E}$, se tiene que los coeficientes de rigidez para este elemento vienen dados por: $\kappa_{11} = \kappa_{22} = {}^{A_x E}\!/_{L}$ y $\kappa_{12} = \kappa_{21} = -{}^{A_x E}\!/_{L}$ tal como se puede apreciar en la Fig.2.4.

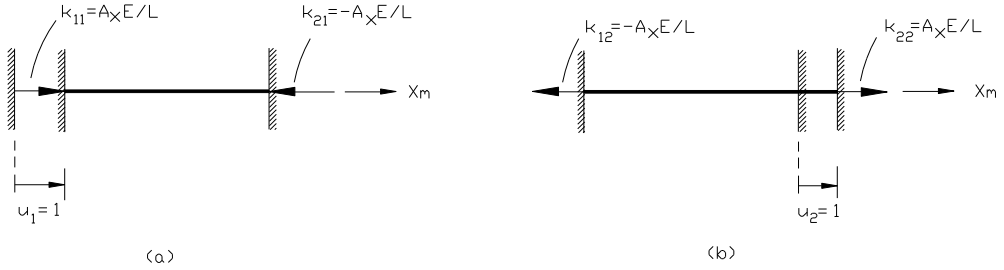


Fig.2.4 Coeficientes de rigidez de un elemento unidimensional sometido a carga axial. (a) Coeficientes k_{11} y k_{21}; (b) Coeficientes k_{12} y k_{22}.

De modo que para este elemento, el sistema de la ec.(2.8) viene dado por:

$$\frac{A_x E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

Como puede notarse, este sistema es similar al sistema dado por la ec. (2.6), en el cual $\kappa = {}^{A_x E}\!/_{L}$, ya que, en esencia, representan el mismo tipo de elemento.

2.3.2.- Elemento de armadura plana

En la Fig.2.5a se muestra un elemento típico (*k*) de una armadura plana. Se supone que dicho elemento está situado en el plano *xy,* en donde *x* y *y* son los ejes de referencia de la estructura. Este elemento posee dos grados de libertad por nodo (en vez de uno como en los ejemplos anteriores), de tal modo que, en total, el elemento posee cuatro grados de libertad, por lo que se necesitan cuatro ecuaciones para describir las características de fuerza-desplazamiento de este elemento.

La matriz de rigidez para el elemento genérico (*k*), asociada al sistema local de referencia (Fig.2.5c), puede obtenerse, fácilmente, a partir del ejemplo anterior (Fig.2.4). Utilizando el sistema de numeración mostrado en la Fig.2.5.c, se hace evidente que:

$$\frac{A_x E}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

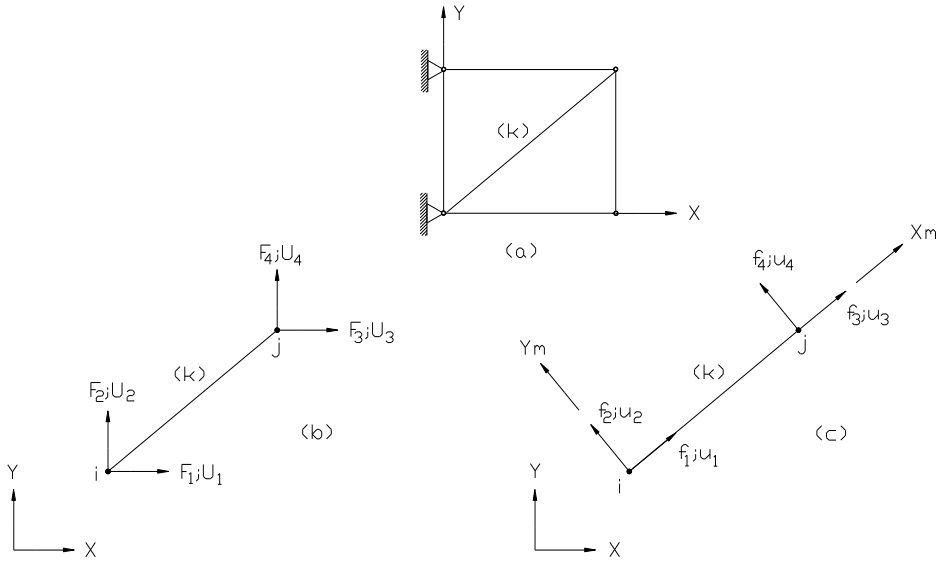


Fig.2.5 Armadura plana y sistemas de referencia. (a) Armadura referida al sistema global X-Y. (b) Componentes de las fuerzas y de los desplazamientos orientados con relación al sistema global X-Y; (c) Componentes de las fuerzas y de los desplazamientos orientados con relación al sistema local de referencia X_m y Y_m.

donde $\{u_1\ u_2\ u_3\ u_4\}^T$ y $\{f_1\ f_2\ f_3\ f_4\}^T$ representan, respectivamente, los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales de este elemento asociados al sistema local de referencia.

2.3.3.- Elemento de viga de eje recto

Considérese el elemento (k) de viga de eje recto, uniforme y homogéneo, mostrado en la Fig.2.6a. En la Fig.2.6b se puede apreciar dicho elemento en el sistema local de referencia x_m, y_m, z_m. En este tipo de elemento también existen dos grados de libertad por nodo, los cuales están indicados por los vectores numerados del 1 al 4, en la Fig.2.6b.

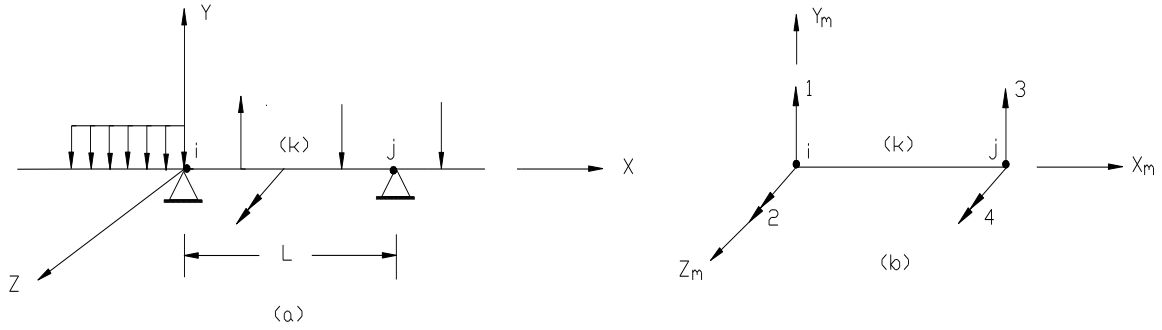


Fig.2.6 Elemento de viga uniforme de eje recto. (a) Sistema global de referencia. (b) Sistema local de referencia.

De nuevo, haciendo uso de la definición de κ_{ij} y de la teoría básica de la mecánica de los sólidos, se procederá a determinar los coeficientes de rigidez de este elemento con relación al

sistema local de referencia. En la Fig.2.7 se muestran los coeficientes a determinar de acuerdo con la numeración adoptada en la Fig.2.6b.

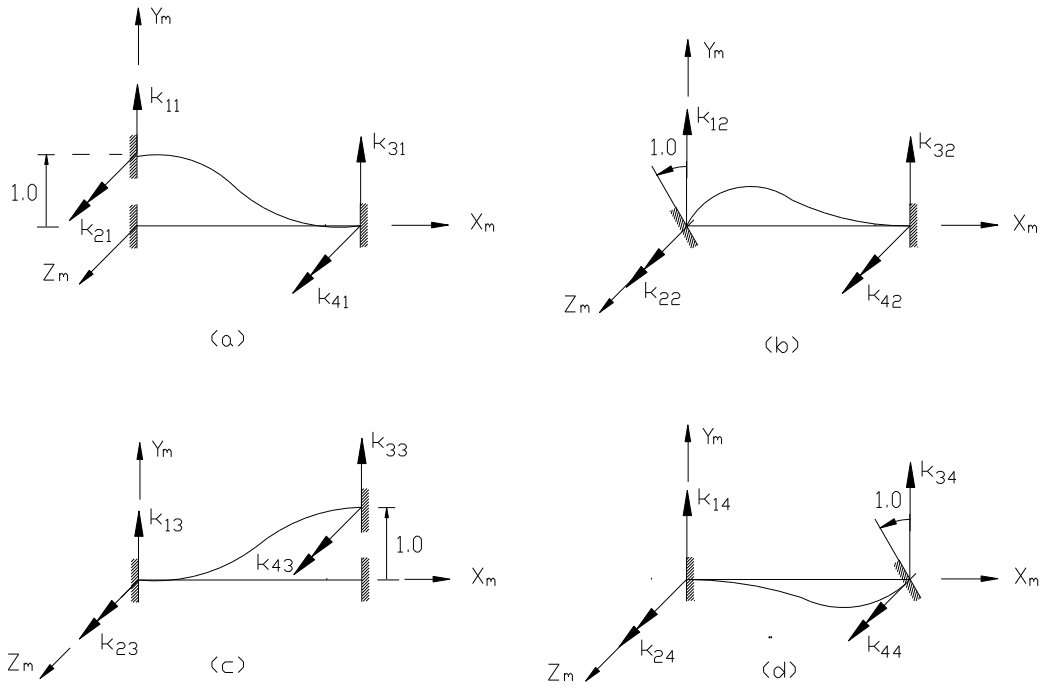
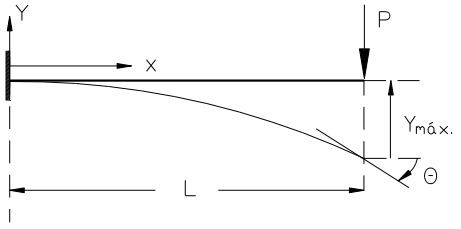
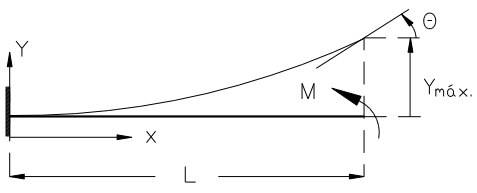


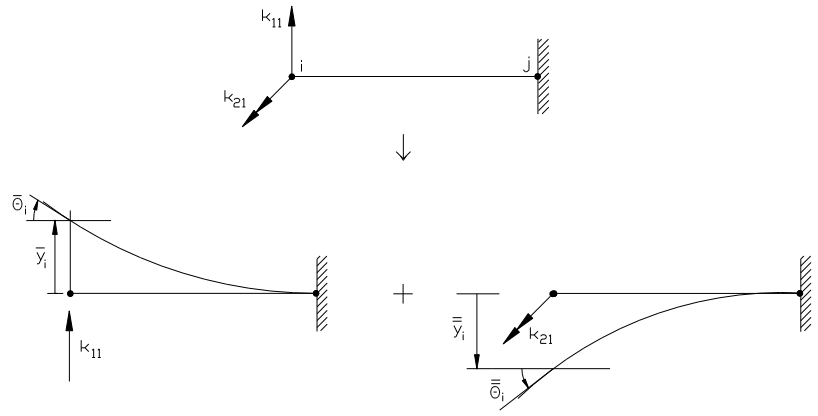
Fig.2.7 Coeficientes de rigidez asociados al elemento de viga uniforme de eje recto.

Debido a la indeterminación estática presente en este problema, se considerarán como redundantes, la fuerza y el momento en un extremo del elemento El cálculo de los coeficientes κ_{ij} se hará aplicando el principio de superposición y con la ayuda de la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Deflexiones y pendientes de una viga de eje recto en voladizo.

Tipo de carga	+Y	+Θ
	$Y_{máx} = -\frac{PL^3}{3EI}$ en x=L	$\Theta = -\frac{PL^2}{2EI}$ en x=L
	$Y_{máx} = +\frac{ML^2}{2EI}$ en x=L	$\Theta = +\frac{ML}{EI}$ en x=L

Así, para el caso de la Fig.2.7a, la solución es:



$$\bar{y}_i = \frac{\kappa_{11} L^3}{3EI} \qquad \bar{\bar{y}}_i = -\frac{\kappa_{21} L^2}{2EI}$$

$$\bar{\theta}_i = -\frac{\kappa_{11} L^2}{2EI} \qquad \bar{\bar{\theta}}_i = \frac{\kappa_{21} L}{EI}$$

Las condiciones de contorno son:

$$\theta_i = \bar{\theta}_i + \bar{\bar{\theta}}_i = 0 \tag{a}$$

$$y_i = \bar{y}_i + \bar{\bar{y}}_i = 1.0 \tag{b}$$

Luego:

De la ec.(a) $$-\frac{\kappa_{11} L^2}{2EI} + \frac{\kappa_{21} L}{EI} = 0 \Rightarrow \kappa_{11} = \frac{2\kappa_{21}}{L} \tag{c}$$

De la ec.(b): $$\frac{\kappa_{11} L^3}{3EI} - \frac{\kappa_{21} L^2}{2EI} = 1.0 \Rightarrow \frac{2\kappa_{21}}{L}\left(\frac{L^3}{3EI}\right) - \frac{\kappa_{21} L^2}{2EI} = 1.0 \tag{d}$$

De las ecs.(c) y (d) se obtiene:

$$\kappa_{21} = \frac{6EI}{L^2} \qquad \kappa_{11} = \frac{12EI}{L^3}$$

Siguiendo un procedimiento análogo, en el caso de la Fig.2.7b se determinan los coeficientes de rigidez:

$$\kappa_{12} = \frac{6EI}{L^2} \qquad \kappa_{22} = \frac{4EI}{L}$$

De igual modo, para el caso de la Fig.2.7c, se obtienen:

$$\kappa_{43} = -\frac{6EI}{L^2} \qquad \kappa_{33} = \frac{12EI}{L^3}$$

Y, finalmente, para el caso de la Fig.2.7d, se pueden determinar los siguientes coeficientes de rigidez:

$$\kappa_{44} = \frac{4EI}{L} \qquad \kappa_{34} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Los restantes coeficientes de rigidez se determinan mediante los requisitos de equilibrio estático: $\sum F_y = 0$ y $\sum M_z = 0$. Así, la matriz de rigidez del elemento de viga de eje recto está dada por:

$$\left[\kappa_m\right]_k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Siguiendo un procedimiento similar se puede deducir las matrices de rigidez de otros elementos reticulares, tales como, armaduras espaciales, parrillas, pórticos planos, etc.

2.4.- Formulación general del método directo

La deducción de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos presentados en la sección anterior involucró, únicamente, el concepto de coeficiente de rigidez y la utilización de algunas relaciones básicas de la mecánica de los sólidos. A continuación se presentará la deducción de las matrices de dichos elementos a través de un procedimiento más general, el cual puede aplicarse, con las mismas limitaciones implícitas en el método directo, a problemas de distinta naturaleza. Mediante este procedimiento, la formulación de la matriz de rigidez de un elemento se realiza a través de los siguientes pasos:

a.- Se asume el campo de los desplazamientos en el interior de un elemento, en términos de los desplazamientos definidos en los nodos del mismo.

b.- Se introducen las ecuaciones cinemáticas, con las cuales se determina el estado de deformación del elemento, correspondiente al campo de desplazamientos asumido.

c.- Se introduce la influencia de las propiedades del material del elemento mediante las ecuaciones constitutivas (relaciones esfuerzo-deformación).

d.- Se determina el conjunto de fuerzas nodales del elemento.

2.4.1.-Elemento unidimensional sometido a carga axial

Sea el elemento unidimensional sometido a carga axial que se muestra en la Fig.2.8. Igual que antes, se asume que dicho elemento es uniforme y homogéneo. El campo de los

desplazamientos de este elemento, está definido por el desplazamiento axial en los nodos 1 y 2. Luego, para describir la variación unidireccional del desplazamiento, la selección lógica para el campo de desplazamientos, es un polinomio lineal en *x*; es decir:

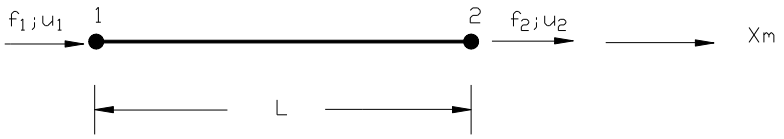


Fig.2.8 Elemento unidimensional uniforme sometido a carga axial.

$$u = a_1 + a_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

Nota: En el caso que el desplazamiento de un punto tenga tres componentes (p.e., u, v y w), entonces se seleccionará una expansión polinomial independiente para cada dirección; es decir:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x \\ v &= a_3 + a_4 y \\ w &= a_5 + a_6 z \end{aligned}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

Para completar el primer paso se debe evaluar la ec.(2.12) en los nodos del elemento (en $x = 0$ y en $x = L$), lo cual conduce a:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

invirtiendo la matriz de este sistema, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

sustituyendo la ec.(2.14) en la ec.(2.12) se obtiene:

$$u = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

donde: $N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ y $N_2 = \frac{x}{L}$ son las llamadas *funciones de forma* del campo de desplazamientos. Estas funciones definen el comportamiento del desplazamiento u en términos de los valores unitarios de los desplazamientos nodales, tal como se muestra en la Fig.2.9.

El segundo paso involucra la introducción de las ecuaciones cinemáticas (relaciones desplazamiento-deformación). En este caso, la única componente de la deformación distinta de cero es $\varepsilon_x = u_{,x}$ $(u_{,x} = du/dx)$. Este paso puede hacerse de dos formas: en la primera, se diferencia la ec.(2.12); es decir:

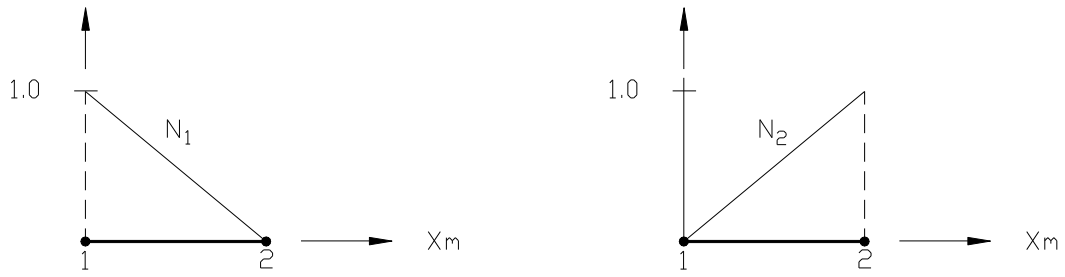


Fig.2.9 Funciones de forma asociadas al elemento unidimensional lineal.

$$u_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

Luego, introduciendo la ec.(2.14) en la ec.(2.16), se obtiene:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

La otra forma de llegar a este resultado es diferenciar directamente la ec.(2.15); es decir:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

En la etapa número tres se introducen las relaciones constitutivas. En este caso, dichas relaciones se reducen a una única expresión:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{2.19}$$

luego:

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Como último paso se debe determinar el conjunto de fuerzas nodales $\{f\} = \{f_1 \quad f_2\}^T$. En este caso, dicho conjunto se obtiene multiplicando el esfuerzo σ_x por el área de la sección transversal A_x del elemento. Luego:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = A_x \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sigma_x \tag{2.21}$$

Nota: el requisito de equilibrio ($\sum F_x = 0$) exige que f_1 actúe en sentido opuesto al sentido positivo de σ_x.

Introduciendo la ec.(2.20) en la ec.(2.21) se obtiene, finalmente:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = A_x E \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{A_x E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

Por supuesto que los sistemas de ecuaciones (2.22) y (2.9) son idénticos. Como ya se mencionó, el resorte elástico-lineal es, en esencia, idéntico al elemento unidimensional, uniforme y homogéneo sometido a carga axial.

La deducción de la matriz de rigidez del elemento de armadura plana, como ya se vio, es similar a la del elemento uniforme axial aquí presentado, motivo por el cual se pasará al próximo elemento.

2.4.2.- Elemento de viga de eje recto

Considérese el elemento de viga de eje recto, uniforme y homogéneo que se muestra en la Fig.2.10. La determinación de la matriz de rigidez de este elemento sigue los mismos pasos del ejemplo anterior, pero ahora se deberán definir, no solo los desplazamientos transversales en los extremos del elemento (v_1 y v_2), si no también, las rotaciones (θ_1 y θ_2) en los mismos puntos.

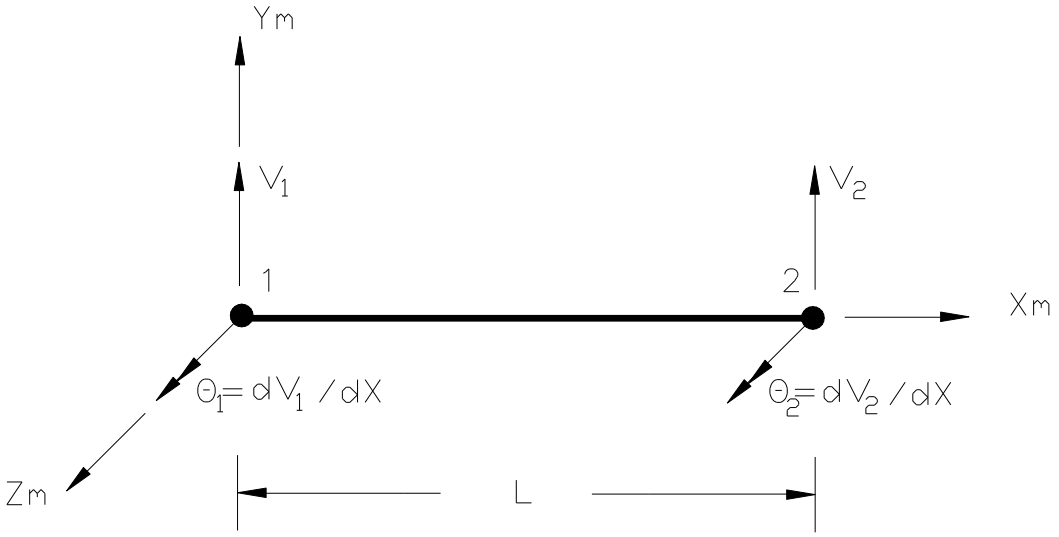


Fig.2.10 Elemento de viga de eje recto.

Como en el ejemplo anterior, se comenzará por definir el polinomio que describe el campo de desplazamientos de este elemento. Debido a que existen cuatro desplazamientos nodales, se deberá asumir el polinomio cúbico completo.

$$v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

La evaluación de $v = \begin{Bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{Bmatrix}^T$ en los nodos del elemento, conduce a:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

invirtiendo la matriz del sistema anterior, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

sustituyendo la ec.(2.25) en la ec.(2.23), se llega a:

$$v = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

donde:

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N_2 = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \tag{2.27a}$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \qquad N_4 = (x - L)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{2.27b}$$

son las funciones de forma para este elemento, las cuales se muestran en la Fig.2.11. Éstas representan la variación de v a lo largo de la longitud del elemento, debido a valores unitarios de los cuatro desplazamientos nodales v_1, θ_1, v_2 y θ_2.

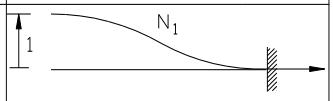
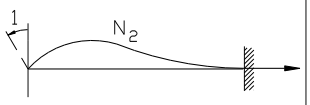
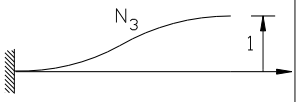
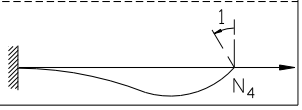
FUNCIONES DE FORMA	X=0		X=L		GRAFICO
	N	dN/dX	N	dN/dX	
$N_1 = 1-3(X/L)^2+2(X/L)^3$	1	0	0	0	
$N_2 = X(1-X/L)^2$	0	1	0	0	
$N_3 = 3(X/L)^2-2(X/L)^3$	0	0	1	0	
$N_4 = (X-L)(X/L)^2$	0	0	0	1	

Fig.2.11 Funciones de forma del elemento de viga de eje recto.

En este caso, las relaciones deformación-desplazamiento se infieren directamente de la hipótesis fundamental de flexión: "secciones planas de la viga, normales a su eje longitudinal, permanecen planas después que la viga se somete a flexión", tal como se muestra en la Fig.2.12.

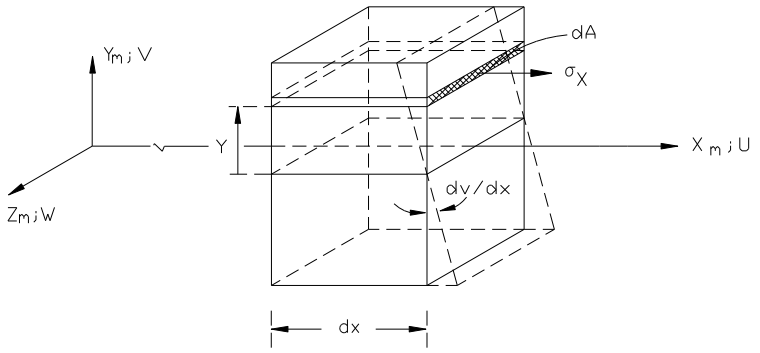


Fig.2.12 Deformaciones debido a la flexión de una viga de eje recto.

De la teoría de flexión de vigas se sabe que:

$$\overline{m} = EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{2.28}$$

donde E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia de la sección transversal (puesto que se ha asumido un elemento uniforme y homogéneo este producto es constante), y $\overline{m}$ es el momento interno resistente. Aunque estrictamente hablando una ecuación constitutiva es una relación esfuerzo-deformación, la ec.(2.28) puede verse como una relación de este tipo ya que en definitiva, $\sigma_x = f(\overline{m})$ y $\varepsilon_x = f\left(d^2v/dx^2\right)$.

Por otro lado, se puede notar que las segundas derivadas de las funciones de forma, [ecs.(2.27)], varían linealmente en el interior del elemento y por lo tanto la curvatura

$\left(v'' = d^2v/dx^2\right)$, puede definirse únicamente, con los valores de v'' en los puntos nodales 1 y 2 del elemento. Así, de la ec.(2.26) se tiene:

$$\begin{Bmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3}\begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

sustituyendo esta ecuación en la ec.(2.28), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.30}$$

donde $\left\{\overline{m}_1 \quad \overline{m}_2\right\}^T$, son los momentos internos resistentes en los nodos del elemento. En este caso, el conjunto de fuerzas nodales es $\{f\} = \left\{f_1 \quad m_1 \quad f_2 \quad m_2\right\}^T$, donde los términos f_1 y f_2 son las fuerzas en la dirección del eje y_m, en los nodos 1 y 2, respectivamente, y m_1 y m_2 representan los momentos con relación al eje z_m en los mismos nodos, tal como se muestra en la Fig.2.13.

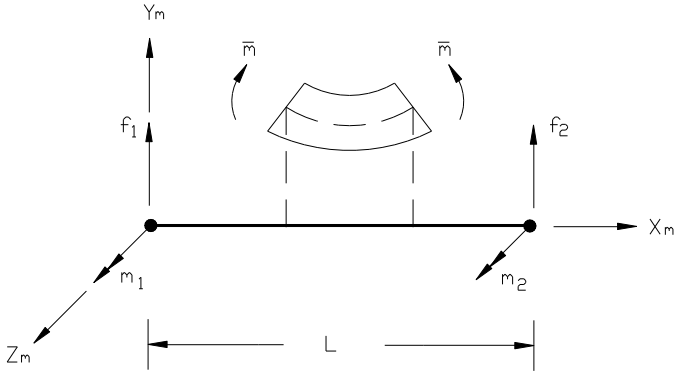


Fig.2.13 Acciones sobre los nodos de un elemento de viga de eje recto.

Los momentos internos $\overline{m}$ se definen como positivos cuando producen una curvatura positiva, tal como se muestra en la figura anterior. Luego, en los nodos del elemento se tiene, respectivamente, $\overline{m}_1 = -m_1$ y $\overline{m}_2 = m_2$. Para determinar f_1 y f_2 en términos de $\overline{m}_1$ y $\overline{m}_2$ se hace uso de las ecuaciones de equilibrio estático; es decir:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -L & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

Sustituyendo la ec.(2.30) en la ec.(2.31), se obtiene, finalmente:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

2.4.3.- Elemento bidimensional

Hasta el presente se han tratado elementos unidimensionales. En esta sección se utilizará el método directo en la deducción de la matriz de rigidez del elemento bidimensional más simple, y extensamente usado en la solución de problemas de ingeniería; el elemento triangular de tres nodos por elemento, el cual se muestra en la Fig.2.14.

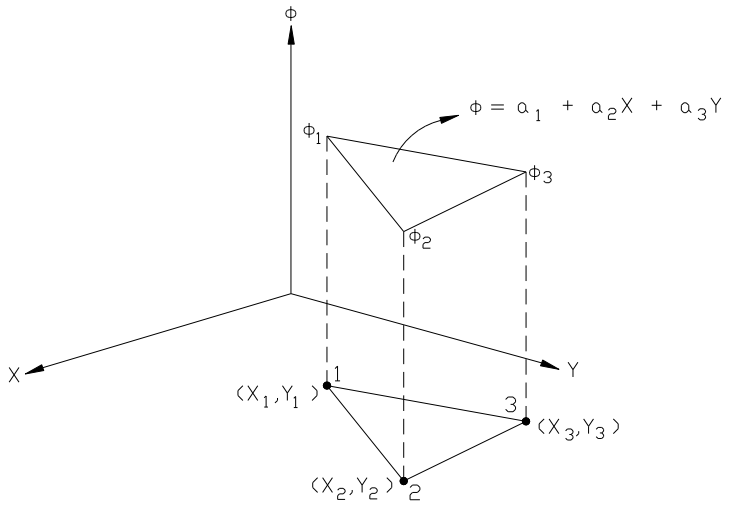


Fig.2.14 Elemento triangular de tres nodos por elemento.

Para este elemento, el polinomio interpolante es:

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

el cual, evaluado en los nodos da:

$$\begin{array}{lllll} \phi = \phi_1 & \text{en} & x = x_1 & y & y = y_1 \\ \phi = \phi_2 & \text{en} & x = x_2 & y & y = y_2 \\ \phi = \phi_3 & \text{en} & x = x_3 & y & y = y_3 \end{array}$$

Sustituyendo estas igualdades en la ec.(2.33), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \\ \phi_2 &= a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \\ \phi_3 &= a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3\end{aligned} \tag{2.34a}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1 \\ a_2 \\ a_3\end{Bmatrix} \tag{2.34b}$$

la inversión de este sistema conduce a:

$$\begin{Bmatrix}a_1 \\ a_2 \\ a_3\end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix}(x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3\end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

donde:

$$2A = \begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix} \tag{2.36}$$

y A es el área del triángulo.

Con la sustitución de la ec.(2.35) en la ec.(2.33) resulta:

$$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \tag{2.37}$$

donde:

$$N_1 = \frac{1}{2A}(a_1 + b_1x + c_1y) \qquad \begin{cases}a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \\ b_1 = y_2 - y_3 \\ c_1 = x_3 - x_2\end{cases}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}(a_2 + b_2x + c_2y) \qquad \begin{cases}a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \\ b_2 = y_3 - y_1 \\ c_2 = x_1 - x_3\end{cases} \tag{2.38}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}(a_3 + b_3x + c_3y) \qquad \begin{cases}a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \\ b_3 = y_1 - y_2 \\ c_3 = x_2 - x_1\end{cases}$$

La evaluación de N_1 en el nodo 1 conduce a:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_1\right)$$

Nótese que los términos dentro del paréntesis es el valor del determinante de la ec.(2.36), por lo tanto:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(2A\right) = 1$$

en el nodo 1. En los nodos 2 y 3 N_1 vale cero:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_2\right) = 0$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_3 - x_2y_3\right) = 0$$

Igual consideración puede hacerse con los nodos 2 y 3.

De acuerdo con la ec.(2.33), ϕ es función de un conjunto de funciones de forma que son lineales en *x* y *y*. Esto significa que los gradientes en dichas direcciones serán constantes.

El gradiente en la dirección *x* es:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \qquad (2.39)$$

pero:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \qquad i=1,2,3$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right) \qquad (2.40)$$

puesto que b_1, b_2 y b_3 son constantes (son fijas una vez que se especifican las coordenadas locales), y ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son independientes de las coordenadas espaciales, la derivada tiene un valor constante con respecto a la dirección x. Con igual razonamiento se concluye, también, que $\frac{\partial\phi}{\partial y} = cte.$

2.4.4- Estado plano de tensiones

El elemento triangular lineal estudiado en la sección anterior fue utilizado inicialmente en la solución de los problemas relacionados con la teoría lineal de la elasticidad bidimensional; es decir en los problemas que pueden ser reducidos al estado plano de tensiones o al estado plano de deformaciones. En esta sección se deducirán, para ambos estados, las respectivas matrices de rigidez de un elemento triangular lineal, en el cual se supondrá homogéneo, isotrópico y de

espesor (t) es constante. En la Fig.2.15 se muestra un elemento genérico con los vectores que representan los desplazamientos y fuerzas nodales, así como también el correspondiente sistema de referencia seleccionado.

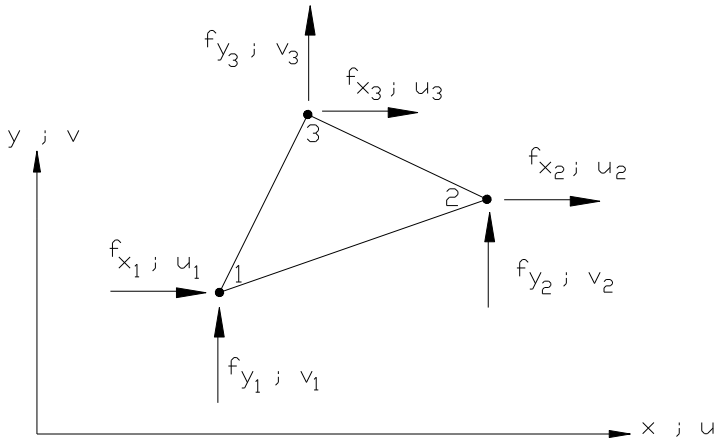


Fig.2.15 Elemento triangular de tres nodos y el sistema de referencia usado.

Como se observa en la figura anterior, los campos de los desplazamientos y de fuerzas nodales vienen dados por:

$$\{\delta\} = \{u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3\}^T \quad ; \quad \{f\} = \{f_{X1}\ f_{Y1}\ f_{X2}\ f_{Y2}\ f_{X3}\ f_{Y3}\}^T \tag{2.41}$$

y que el desplazamiento en el interior del elemento debe ser una función de *x* y *y*, el cual podrá ser determinado a través de los seis desplazamientos nodales. Con esta restricción, la única selección posible para la función del desplazamiento es:

$$u = a_1 + a_2\,x + a_3\,y \qquad ; \qquad v = a_4 + a_5\,x + a_6\,y \tag{2.42}$$

Nótese que estas expresiones son polinomios lineales completos. La evaluación de la componente del desplazamiento u en los puntos nodales, conduce a la ec.(2.34b); es decir:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{2.43}$$

invirtiendo la matriz de este sistema, se llega a:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

sustituyendo a_1, a_2 y a_3 en la primera de las ecs.(2.42) se obtiene:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \tag{2.45}$$

donde N_1, N_2 y N_3, son las funciones de interpolación de este elemento deducidas anteriormente; es decir:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(a_1 + b_1 x + c_1 y\right) \quad \begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 = y_2 - y_3 \\ c_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left(a_2 + b_2 x + c_2 y\right) \quad \begin{cases} a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ b_2 = y_3 - y_1 \\ c_2 = x_1 - x_3 \end{cases} \tag{2.46}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left(a_3 + b_3 x + c_3 y\right) \quad \begin{cases} a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_3 = y_1 - y_2 \\ c_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la componente del desplazamiento v, se llega:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \tag{2.47}$$

Para de la elasticidad lineal, las relaciones desplazamiento-deformación vienen dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.48}$$

Sustituyendo las ecs.(2.45) y (2.47) en las ecs.(2.48), se llega a:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{2.49}$$

donde $N_{i,x}$ representa la derivada de N_i con relación a *x*, etc.

Para introducir las ecuaciones constitutivas, se supondrá que el elemento estará bajo la condición de *estado plano de tensiones*. Esta condición es la forma más simple de comportamiento de una estructura continua y frecuentemente aparece en la práctica. Un ejemplo típico de esta situación lo constituye el caso de una placa delgada cargada en su propio plano, tal como se muestra en la Fig.2.16.

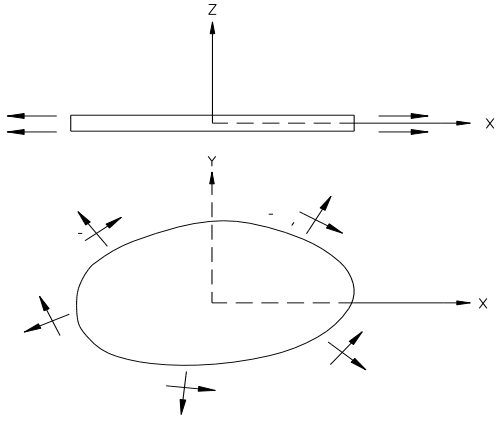


Fig.2.16 Placa plana en estado plano de tensiones.

Para esta condición, $\sigma_z = 0$ y $\varepsilon_z = \nu / E\left(-\sigma_x - \sigma_y\right) \neq 0$. Además, debido a la condición bidimensional del problema, $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ y la ecuación constitutiva es igual a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

El último paso en la deducción de la matriz de rigidez de este elemento, involucra la determinación del conjunto de fuerzas nodales equivalentes, que sean estáticamente equivalentes al campo de esfuerzos (uniforme) que actúa en los lados del elemento. Sin embargo, una dificultad que comúnmente aparece cuando se trabaja con el método directo es, precisamente, la de encontrar las fuerzas nodales que sean estáticamente equivalentes, en forma exacta, al estado de esfuerzos. Nótese que existen seis incógnitas (las seis fuerzas nodales), pero solo tres ecuaciones de equilibrio estático para determinarlas. Para contornar este problema, usualmente se determinan las fuerzas nodales que satisfagan los requerimientos del "balance de fuerzas y de momentos", pero el conjunto, por supuesto, no es único. En la Fig.2.17a se muestra la distribución de esfuerzos sobre el elemento, y en la Fig.2.17b se muestra el conjunto de fuerzas "equivalentes" actuando en el punto medio de los lados del elemento, y las fuerzas nodales correspondientes.

Una forma de determinar un conjunto "físicamente razonable" de fuerzas nodales equivalentes, consiste en dividir las fuerzas de los puntos medios de los lados del triángulo en partes iguales y sumar las contribuciones respectivas en los nodos de cada lado; es decir:

$$f_{x12} = t\left[\sigma_x (y_2 - y_1) - \tau_{xy}(x_2 - x_1)\right] \tag{2.51a}$$

$$f_{y12} = t\left[-\sigma_y (x_2 - x_1) + \tau_{xy}(y_2 - y_1)\right] \tag{2.51b}$$

$$f_{x23} = t\left[\sigma_x (y_3 - y_2) + \tau_{xy}(x_2 - x_3)\right] \tag{2.51c}$$

$$f_{y23} = t\left[\sigma_y (x_2 - x_3) + \tau_{xy}(y_3 - y_2)\right] \tag{2.51d}$$

$$f_{x13} = t\left[-\sigma_x (y_3 - y_1) + \tau_{xy}(x_3 - x_1)\right] \tag{2.51e}$$

$$f_{y13} = t\left[\sigma_y (x_3 - x_1) - \tau_{xy}(y_3 - y_1)\right] \tag{2.51f}$$

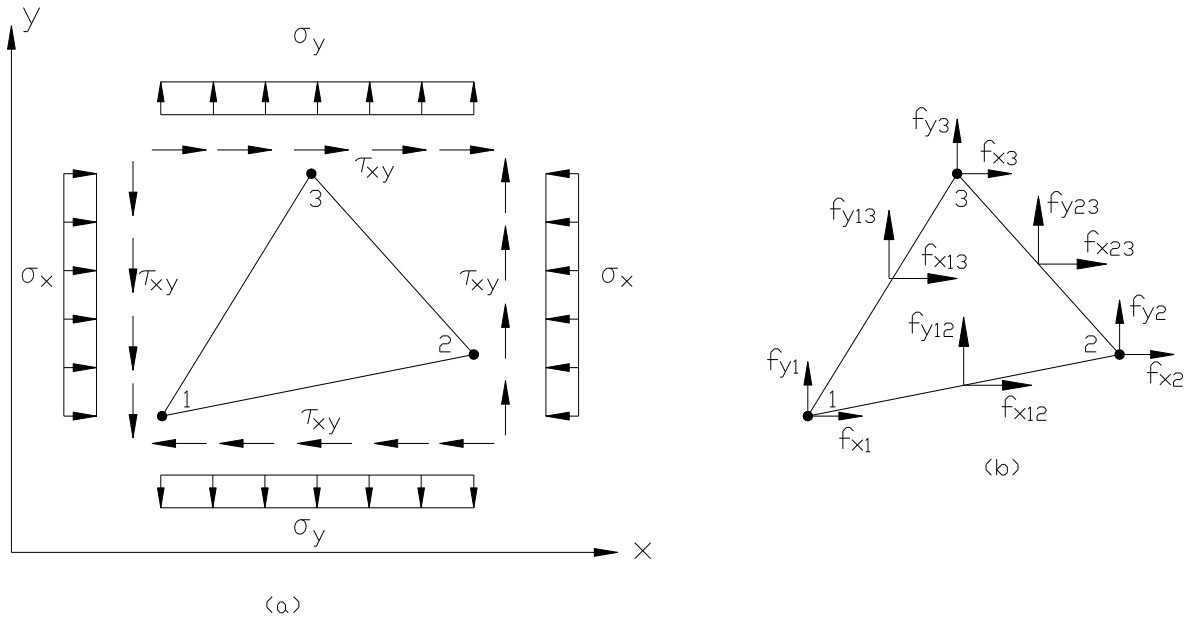


Fig.2.17 Campo de esfuerzos en un elemento triangular de tres nodos. (a) Distribución uniforme de esfuerzos en el contorno del elemento; (b) Componentes de las fuerzas estáticamente equivalentes.

y por lo tanto:

$$f_{x1} = \frac{1}{2}(f_{x12} + f_{x13}) = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (y_2 - y_3) + \tau_{xy}(x_3 - x_2)\right] = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (b_1) + \tau_{xy}(c_1)\right] \tag{2.52a}$$

$$f_{y1} = \frac{1}{2}(f_{y12} + f_{y13}) = \frac{t}{2}\left[\sigma_y (x_3 - x_2) + \tau_{xy}(y_2 - y_3)\right] = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (c_1) + \tau_{xy}(b_1)\right] \tag{2.52b}$$

$$f_{x2} = \frac{1}{2}(f_{x12} + f_{x23}) = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (y_3 - y_1) + \tau_{xy}(x_1 - x_3)\right] = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (b_2) + \tau_{xy}(c_2)\right] \tag{2.52c}$$

$$f_{y2} = \frac{1}{2}(f_{y12} + f_{y23}) = \frac{t}{2}\left[\sigma_y (x_1 - x_3) + \tau_{xy}(y_3 - y_1)\right] = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (c_2) + \tau_{xy}(b_2)\right] \tag{2.52d}$$

$$f_{x3} = \frac{1}{2}(f_{x13} + f_{x23}) = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (y_1 - y_2) + \tau_{xy}(x_2 - x_1)\right] = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (b_3) + \tau_{xy}(c_3)\right] \tag{2.52e}$$

$$f_{y3} = \frac{1}{2}(f_{y13} + f_{y23}) = \frac{t}{2}\left[\sigma_y (x_2 - x_1) + \tau_{xy}(y_1 - y_3)\right] = \frac{t}{2}\left[\sigma_x (c_3) + \tau_{xy}(b_3)\right] \tag{2.52f}$$

en forma matricial las ecuaciones anteriores se escriben:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.53}$$

Finalmente, sustituyendo la ec.(2.50) en la ec.(2.53), y la ec.(2.49) en el resultado anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

Una vez efectuadas las operaciones indicadas en la ecuación anterior se llega, finalmente, al sistema de ecuaciones:

$$\{f\} = [\kappa]\{\delta\} \tag{2.55}$$

donde: $\{f\} = \{f_{x1}\ f_{y1}\ f_{x2}\ f_{y2}\ f_{x3}\ f_{y3}\}^T$ y $\{\delta\} = \{u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3\}^T$ y $[\kappa]$ representa la matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos para el estado plano de tensiones, la cual se muestra en la Tabla2.2.

Tabla 2.2 Matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos para el caso de un material homogéneo e isotrópico bajo un estado plano de tensiones.

$$[k] = \beta_1 \begin{bmatrix} b_1^2 + \gamma_1 c_1^2 & \nu b_1 c_1 + \gamma_1 c_1 b_1 & b_1 b_2 + \gamma_1 c_1 c_2 & \nu b_1 c_2 + \gamma_1 c_1 b_2 & b_1 b_3 + \gamma_1 c_1 c_3 & \nu b_1 c_3 + \gamma_1 c_1 b_3 \\ & c_1^2 + \gamma_1 b_1^2 & \nu c_1 b_2 + \gamma_1 b_1 c_2 & c_1 c_2 + \gamma_1 b_1 b_2 & \nu c_1 b_3 + \gamma_1 b_1 c_3 & c_1 c_3 + \gamma_1 b_1 b_3 \\ & & b_2^2 + \gamma_1 c_2^2 & \nu b_2 c_2 + \gamma_1 c_2 b_2 & b_1 b_3 + \gamma_1 c_2 c_3 & \nu b_2 c_3 + \gamma_1 c_2 b_3 \\ & & & c_2^2 + \gamma_1 b_2^2 & \nu c_2 b_3 + \gamma_1 b_2 c_3 & c_2 c_3 + \gamma_1 b_2 b_3 \\ & \text{Simétrica} & & & b_3^2 + \gamma_1 c_3^2 & \nu b_3 c_3 + \gamma_1 c_3 b_3 \\ & & & & & c_3^2 + \gamma_1 b_3^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\beta_1 = \frac{E\,t}{4A(1-\nu^2)} \qquad ; \qquad \gamma_1 = \frac{1-\nu}{2}$$

2.4.5.- Estado plano de deformaciones

La matriz de rigidez de este elemento, bajo la condición de *estado plano de deformaciones*, se deduce mediante el mismo procedimiento, con la única excepción de la ec.(2.50), la cual debe reemplazarse con las relaciones constitutivas asociadas a este estado. En la Fig.2.18 se muestra un caso típico de estado plano de deformación. Un elemento, cuya dimensión en la dirección *z* es mayor que en las direcciones *x* y *y*, se fija en sus extremos de tal modo que no exista desplazamiento en la dirección *z*. Bajo esta condición, la deformación axial en esta dirección es cero $\left(\varepsilon_z = 0\right)$. Es decir, con estas condiciones, todas las partículas, originalmente en un plano, permanecen en el mismo plano, después de la deformación. La condición bidimensional del problema, al igual que en el caso anterior, hace que $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Luego, para el estado plano de deformación $\varepsilon_z = 0$ y $\sigma_x = -\nu/\mathrm{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \neq 0$, y la ecuación constitutiva es:

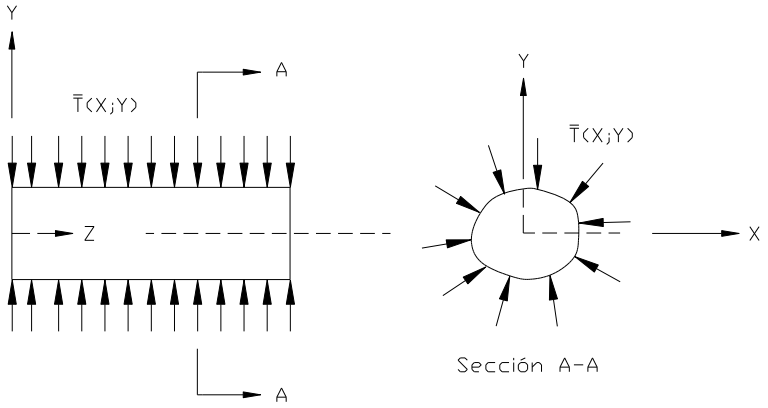


Fig.2.18 Barra en estado plano de deformación.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

Entonces, si se reemplaza esta ecuación por la ec.(2.50) en la ec.(2.54), se obtiene la matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos para el estado plano de deformaciones, la cual se presenta en la Tabla2.3.

Tabla 2.3 Matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos para el caso de un material homogéneo e isotrópico bajo un estado plano de deformaciones.

$$[\mathrm{k}] = \beta_2\begin{bmatrix}
\gamma_2 b_1^2 + \gamma_3 c_1^2 & \nu b_1 c_1 + \gamma_3 c_1 b_1 & \gamma_2 b_1 b_2 + \gamma_3 c_1 c_2 & \nu b_1 c_2 + \gamma_3 c_1 b_2 & \gamma_2 b_1 b_3 + \gamma_3 c_1 c_3 & \nu b_1 c_3 + \gamma_3 c_1 b_3\\
 & \gamma_2 c_1^2 + \gamma_2 b_1^2 & \nu c_1 b_2 + \gamma_3 b_1 c_2 & \gamma_2 c_1 c_2 + \gamma_3 b_1 b_2 & \nu c_1 b_3 + \gamma_3 b_1 c_3 & \gamma_2 c_1 c_3 + \gamma_3 b_1 b_3\\
 & & \gamma_2 b_2^2 + \gamma_2 c_2^2 & \nu b_2 c_2 + \gamma_3 c_2 b_2 & \gamma_2 b_1 b_3 + \gamma_3 c_2 c_3 & \nu b_2 c_3 + \gamma_3 c_2 b_3\\
 & & & \gamma_2 c_2^2 + \gamma_2 b_2^2 & \nu c_2 b_3 + \gamma_3 b_2 c_3 & \gamma_2 c_2 c_3 + \gamma_3 b_2 b_3\\
 & \text{Simétrica} & & & \gamma_2 b_3^2 + \gamma_2 c_3^2 & \nu b_3 c_3 + \gamma_3 c_3 b_3\\
 & & & & & \gamma_2 c_3^2 + \gamma_3 b_3^2
\end{bmatrix}$$

donde:

$$\beta_1 = \frac{E\,t}{4A(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad ; \qquad \gamma_2 = (1-\nu) \quad ; \qquad \gamma_3 = \frac{1-2\nu}{2}$$

Nótese, que a pesar de la sencillez del elemento triangular de tres nodos, el nivel de exigencia en las operaciones matriciales envueltas en la determinación de la matriz de rigidez es alto, comparado con los elementos unidimensionales previamente analizados. Sirva este comentario final para insistir en que el método directo, cuando se trabaja con elementos complejos - aunque permite la visualización física de los problemas, muestra claramente algunos de los pasos asociados al **mef** y demanda un nivel matemático bajo - no es adecuado.

Hasta el presente se ha analizado la construcción de las matrices de rigidez locales de algunos elementos estructurales, uni y bidimensionales, a través del método directo. El análisis de un problema dado mediante el **mef** continua, como ya fue descrito, con la transformación de dichas matrices al sistema global de referencia, su ensamblaje y la solución del respectivo sistema de ecuaciones resultante. En las siguientes secciones se tratará, con detalle, estos aspectos del **mef**.

2.5.- Transformación de coordenadas

En la sección anterior, se estudió el procedimiento para establecer la matriz local de rigidez de algunos elementos sencillos asociados a la mecánica estructural. Como se mencionó, el próximo paso en la solución de un problema vía el **mef**, consiste en transformar dichas matrices del sistema local de referencia, al sistema global, lo cual puede efectuarse de dos maneras:

La primera consiste en formular directamente la matriz de rigidez global, la cual se obtiene induciendo desplazamientos unitarios (i.e., utilizando la propia definición de κ_{ij}), en las direcciones del sistema global de referencia. En la segunda se obtiene, en primer lugar, la matriz de rigidez con relación al sistema local de referencia, y en seguida se transforma esta matriz, vía un procedimiento de rotación de ejes, a los ejes globales de referencia.

La formulación directa de la matriz de rigidez global se vuelve muy complicada para los elementos estructurales complejos, tales como por ejemplo los pórticos espaciales. Por otro lado, el método de rotación de ejes es un camino seguro y no es más difícil, en teoría, para una estructura complicada que para una simple. El ejemplo del elemento de armadura plana estudiado en la sección 2.b, servirá para ilustrar ambos procedimientos.

2.5.1.-Formulación directa

Como ya se mencionó, la formulación directa de la matriz de rigidez global de un elemento se hace a través de la definición de κ_{ij}. En este caso, por ejemplo, κ_{12} es la fuerza (asociada al nodo i) en la dirección *x*, requerida para producir un desplazamiento unitario en la dirección *y* $(v_1 = 1\text{0})$. En la Fig.2.19 se muestra, para un elemento de armadura plana, la forma de determinar estos coeficientes de rigidez.

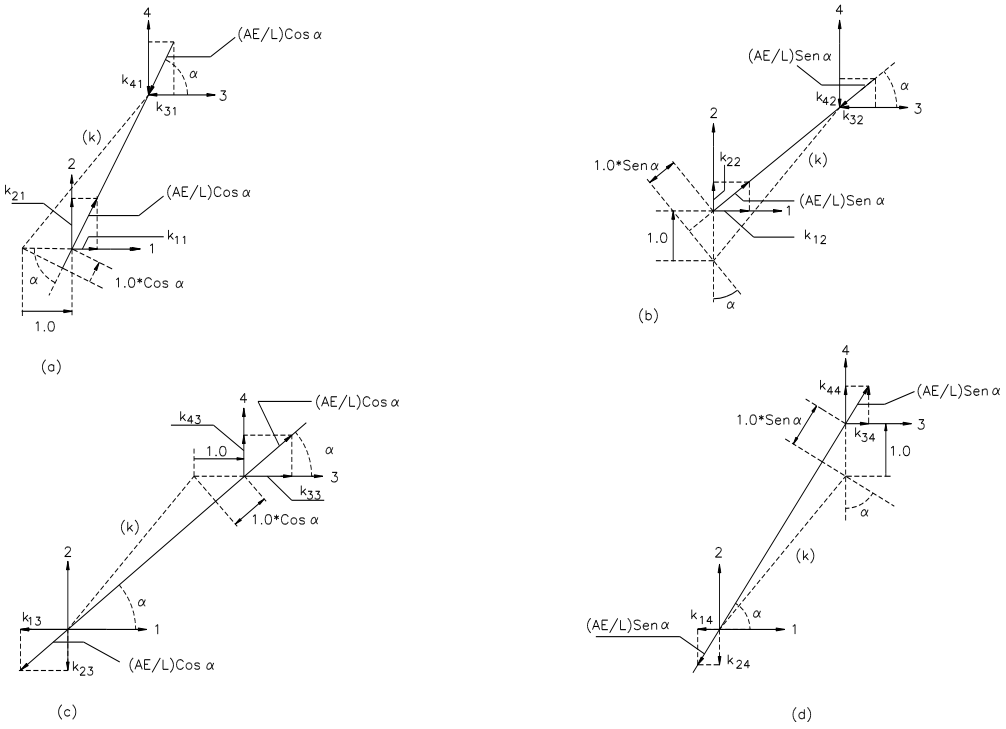


Fig.2.19 Coeficientes de rigidez de un elemento de armadura plana asociados al sistema global de referencia.

El primero de estos desplazamientos se muestra en la Fig.2.19a, y consiste en una traslación unitaria en la dirección 1. Como resultado de este desplazamiento, se induce una fuerza axial en el elemento. Esta fuerza se puede calcular a partir del acortamiento axial que ocurre en el elemento, el cual es numéricamente igual a $1.0 \times \text{Cos}\alpha$. La fuerza de compresión axial, debido a este cambio de longitud es igual a $\left(A_x E/L\right)\cos\alpha$, y por lo tanto, de la Fig.2.19a, es fácil verificar que:

$$\kappa_{11} = \left(EA/L\right)\text{Cos}^2\alpha \qquad \kappa_{21} = \left(EA/L\right)\text{Cos}\alpha\ \text{Sen}\alpha$$
$$\kappa_{31} = -\left(EA/L\right)\text{Cos}^2\alpha \qquad \kappa_{41} = -\left(EA/L\right)\text{Cos}\alpha\ \text{Sen}\alpha$$

De igual modo, de la Fig.2.19b:

$$\kappa_{12} = \left(EA/L\right)\text{Sen}\alpha\,\text{Cos}\alpha \qquad \kappa_{22} = \left(EA/L\right)\ \text{Sen}^2\alpha$$

$$\kappa_{32} = -\left(EA/L\right)\text{Sen}\alpha\,\text{Cos}\alpha \qquad \kappa_{42} = -\left(EA/L\right)\text{Sen}^2\alpha$$

de la Fig2.19c:

$$\kappa_{13} = -\left(EA/L\right)\text{Cos}^2\alpha \qquad \kappa_{23} = -\left(EA/L\right)\text{Cos}\alpha\ \text{Sen}\alpha$$

$$\kappa_{33} = \left(EA/L\right)\text{Cos}^2\alpha \qquad \kappa_{43} = \left(EA/L\right)\text{Cos}\alpha\ \text{Sen}\alpha$$

y, finalmente, de la Fig.2.19d:

$$\kappa_{14} = -\left(EA/L\right) Sen\,\alpha\, Cos\alpha \qquad \kappa_{24} = -\left(EA/L\right)\ Sen^2\alpha$$

$$\kappa_{34} = \left(EA/L\right) Sen\,\alpha\, Cos\alpha \qquad \kappa_{44} = \left(EA/L\right)\ Sen^2\,\alpha$$

En la deducción de estos coeficientes de rigidez se ha supuesto que cuando se aplican los desplazamientos unitarios en los extremos de los elementos, el cambio de longitud del mismo es pequeño comparado con la longitud inicial y que el ángulo de inclinación del elemento permanece, esencialmente, constante. Así, la matriz de rigidez global del elemento genérico *k* viene dada por:

$$\frac{EA_x}{L}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & sen\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -sen\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha sen\alpha & sen^2\alpha & -\cos\alpha sen\alpha & -sen^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -sen\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & sen\alpha\cos\alpha \\ -\cos\alpha sen\alpha & -sen^2\alpha & \cos\alpha sen\alpha & sen^2\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{2.57}$$

donde $\{U_1\ U_2\ U_3\ U_4\}^T$ y $\{F_1\ F_2\ F_3\ F_4\}^T$ representan, respectivamente, los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales del elemento considerado, asociados al sistema global de referencia.

2.5.2.- Formulación vía matrices de rotación

Como se ha podido notar, las ecuaciones matriciales a ser transformadas tienen la forma general:

$$[\kappa]\{\chi^*\} = \{b^*\} \tag{2.58}$$

donde el asterisco denota un sistema local de referencia. Si se supone que existe una matriz de transformación $[\phi]$ entre los sistemas local y global, se puede escribir:

$$\{\chi^*\} = [\phi]\{\chi\} \tag{2.59}$$

y

$$\{b^*\} = [\phi]\{b\} \tag{2.60}$$

donde $\{\chi\}$ y $\{b\}$ están referidos al sistema global. Sustituyendo las ecs.(2.59) y (2.60) en la ec.(2.58), resulta:

$$[\kappa][\phi]\{\chi\} = [\phi]\{b\} \tag{2.61}$$

pre-multiplicando esta ecuación por la inversa de la matriz de transformación, se obtiene:

$$[\phi]^{-1}[\kappa][\phi]\{\chi\}=\{b\} \tag{2.62}$$

o

$$[K]\{\chi\} = \{b\} \tag{2.63}$$

donde:

$$[K] = [\phi]^{-1}[\kappa][\phi] \tag{2.64}$$

La ec.(2.64) expresa la matriz de rigidez de un elemento con relación al sistema global de referencia, siempre que $[\phi]$ exista. Si los vectores $\{\chi^*\}$ y $\{b^*\}$ son cantidades direccionales, tales como desplazamientos nodales y fuerzas nodales, entonces la matriz de transformación es simplemente una colección de cosenos directores, mediante los cuales se relacionan los dos sistemas. En este caso, $[\phi]$ es ortogonal ($[\phi]^{-1} = [\phi]^T$), y por lo tanto:

$$[K] = [\phi]^T[\kappa][\phi] \tag{2.65}$$

Para ilustrar este procedimiento, considérese en primer lugar la rotación de ejes para vectores en dos dimensiones, la cual se formulará sobre una base geométrica. Para tal fin, considérese un vector **A** tal como se muestra en la Fig.2.20. En esta figura también se muestra dos sistemas de ejes ortogonales: XS , YS que corresponden al sistema global de referencia y XM , YM que definen el sistema local de referencia.

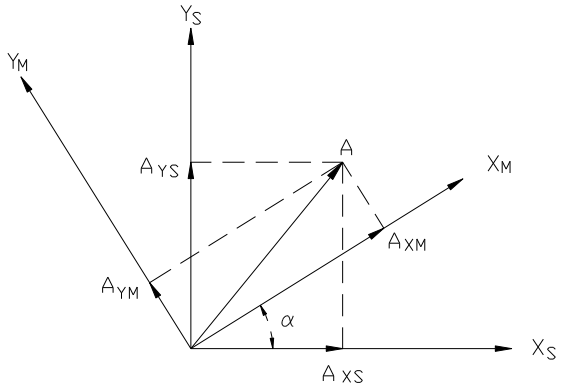


Fig.2.20 Rotación de ejes en dos dimensiones.

De la Fig.2.20 se puede observar que A_{XM} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XS} y A_{YS} sobre el eje XM. De igual modo, A_{YM} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XS} y A_{YS} sobre el eje YM. Por lo tanto se tiene que:

$$A_{XM} = \cos\alpha\, A_{XS} + \text{sen}\,\alpha\, A_{YS} \tag{2.66a}$$

$$A_{YM} = -\text{sen}\,\alpha\, A_{XS} + \cos\alpha\, A_{YS} \tag{2.66b}$$

en forma matricial, estas ecuaciones se escriben:

$$\begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{Bmatrix} \tag{2.67}$$

o, en forma más compacta:

$$\{A_M\} = [R]\{A_S\} \tag{2.68}$$

donde:

A_M: es el vector que contiene las componentes de **A** paralelas a los ejes XM , YM.

A_S :es el vector que contiene las componentes de **A** paralelas a XS , YS.

R : es una matriz de cosenos directores llamada *matriz de rotación*.

Así mismo, es posible expresar el grupo de componentes XS , YS del vector **A**, en términos del grupo de componentes XM , YM . Esta transformación se puede realizar observando (Fig.2.20) que A_{XS} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XM} y A_{YM} sobre el eje xs y que A_{YS} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XM} y A_{YM} sobre el eje YS. Por lo tanto:

$$A_{XS} = \cos\alpha\, A_{XM} - \text{sen}\,\alpha\, A_{YM} \tag{2.69a}$$

$$A_{YS} = \text{sen}\,\alpha\, A_{XM} + \cos\alpha\, A_{YM} \tag{2.69b}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{Bmatrix} \tag{2.70}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{Bmatrix} \tag{2.71}$$

en forma compacta, el sistema (2.71) se escribe:

$$\{A_S\} = [R]^T\{A_M\} \tag{2.72}$$

en donde la matriz $[R]^T$es la *matriz transpuesta* de la matriz de rotación $[R]$. Finalmente, es obvio, de las ecs.(2.65) y (2.68), que la transpuesta de la matriz $[R]$, es igual a su inversa; es decir:

$$[R]^T = [R]' \tag{2.73}$$

y, por lo tanto, la matriz de rotación R es una matriz ortogonal.

Así, con estos resultados se puede obtener, fácilmente, la matriz de rigidez del elemento de armadura plana con relación al sistema global de referencia, a partir de su matriz de rigidez local. En efecto, las relaciones fuerza-desplazamiento en las direcciones XM , YM en los extremos del elemento genérico (*k*), se pueden expresar como:

$$\{f_M\}_k = [\kappa_M]_k \{u_M\}_k \tag{2.74}$$

donde la matriz de rigidez local del elemento genérico (*k*) fue previamente calculada ec.(2.10):

$$[\kappa_M]_k = \frac{E A_X}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, el objetivo es transformar esta matriz en la matriz $[\kappa_S]_k$ asociada al sistema global de referencia.

Omitiendo el subíndice (*k*) de la ec.(2.74), esta ecuación se puede escribir como:

$$\begin{Bmatrix} f_{M1} \\ f_{M2} \\ f_{M3} \\ f_{M4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{M11} & \kappa_{M12} & \kappa_{M13} & \kappa_{M14} \\ \kappa_{M21} & \kappa_{M22} & \kappa_{M23} & \kappa_{M24} \\ \kappa_{M31} & \kappa_{M32} & \kappa_{M33} & \kappa_{M34} \\ \kappa_{M41} & \kappa_{M42} & \kappa_{M43} & \kappa_{M44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{M1} \\ u_{M2} \\ u_{M3} \\ u_{M4} \end{Bmatrix} \tag{2.75}$$

Los subíndices 1,2,3 y 4 usados en esta ecuación se refieren a las direcciones indicadas en la Fig.2.5c. La ecuación anterior también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} f_{Mi} \\ f_{Mj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{Mii} & \kappa_{Mij} \\ \kappa_{Mji} & \kappa_{Mjj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{Mi} \\ u_{Mj} \end{Bmatrix} \tag{2.76}$$

En esta ecuación, los subíndices *i* y *j* de las sub-matrices, se refieren a los extremos *i* y *j* del elemento (*k*). Los términos $f_{Mi}, f_{Mj}, u_{Mi}, u_{Mj}$ en la ec.(2.76) representan vectores de dos dimensiones (ya sean fuerzas o desplazamientos), en los extremos de los elementos, en las direcciones de los ejes de mismo. Por lo tanto estos vectores se pueden expresar con relación a los ejes globales de la estructura (ver Fig.2.5b), utilizando la fórmula de rotación dada por la ec.(2.72); es decir:

$$\begin{Bmatrix} [R]\{F_i\} \\ [R]\{F_j\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{Mii} & \kappa_{Mij} \\ \kappa_{Mji} & \kappa_{Mjj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [R]\{U_{Mi}\} \\ [R]\{U_{Mj}\} \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

donde F_i, F_j, U_i, U_j representan las fuerzas y los desplazamientos en los extremos del elemento, con respecto a los ejes globales del sistema.

Una forma de equivalente de la ec.(2.76) es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{Mii} & \kappa_{Mij} \\ \kappa_{Mji} & \kappa_{Mjj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \tag{2.78}$$

Para simplificar la escritura de esta ecuación, sea $[R_T]$ la matriz de rotación transformada, tanto para las fuerzas como para los desplazamientos, en ambos extremos del elemento:

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Entonces, la ec.(2.78) se puede escribir del siguiente modo:

$$[R_T]\{F\} = [\kappa_M][R_T]\{U\} \tag{2.80}$$

pre-multiplicando la ecuación anterior por la matriz inversa de $[R_T]$, resulta:

$$\{F\} = [R_T]^{-1}[\kappa_M][R_T]\{U\} \tag{2.81}$$

Como la sub-matriz $[R]$ es ortogonal, la matriz $[R_T]$ también es ortogonal. Luego, la ecuación anterior se escribe:

$$[F] = [R_T]^T[\kappa_M][R_T]\{U\} \tag{2.82a}$$

o, en forma compacta:

$$\{F\} = [K_S]\{U\} \tag{2.82b}$$

donde, finalmente:

$$[K_S] = [R_T]^T[\kappa_M][R_T] \tag{2.83}$$

es la matriz de rigidez del elemento (*k*) con respecto al sistema global de referencia. Comparando las ecs.(2.65) y (2.83), se observa que para este caso:

$$[\phi] = [R_T] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

Nótese que este procedimiento es completamente general, independientemente del tipo de elemento y su complejidad. Además de la transformación de la matriz de rigidez desde los ejes locales a los ejes globales, el concepto de rotación de ejes también se puede utilizar para otros propósitos, tales como la formación del llamado *vector de cargas nodales equivalente* . Por el momento, la aplicación de la ec.(2.83) al elemento genérico *k* de armadura plana en estudio, conduce a:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \frac{A_X E}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ 0 & 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\frac{A_X E}{L}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha & -\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ -\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}^2\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{bmatrix}$$

que por supuesto, es la misma matriz del sistema (2.57).

2.6.- Ensamblaje de las matrices de rigidez

Una vez determinadas las ecuaciones de cada elemento referidas al sistema global de referencia, el próximo paso en el **mef** consiste en combinar todas estas ecuaciones, de modo que se forme el conjunto de ecuaciones que describa el comportamiento global del problema en estudio. El procedimiento para construir dicho conjunto es siempre el mismo, independientemente del tipo de problema considerado, o de la complejidad de los elementos utilizados. Aun si el problema es modelado mediante diferentes tipos de elementos, el sistema de ecuaciones se ensambla de la misma manera.

El procedimiento de ensamblaje del sistema está basado en la llamada "compatibilidad" en los nodos del elemento, lo cual significa que el valor de la variable del problema (o variables, si existe más de una en cada nodo), es el mismo para todos los elementos conectados al mismo. Esta regla constituye la base para el proceso del ensamblado, el cual es una parte esencial en la solución de todo problema mediante el **mef**.

2.6.1.- Reglas del ensamblaje

El procedimiento general de ensamblado y la discusión del algoritmo para su ejecución, se presentará a través de un ejemplo sencillo, como lo es la determinación del comportamiento fuerza-deformación, del sistema formado por el conjunto de resortes lineales mostrado en la Fig.2.21. El sistema consta de cuatro elementos, de dos nodos por elemento.

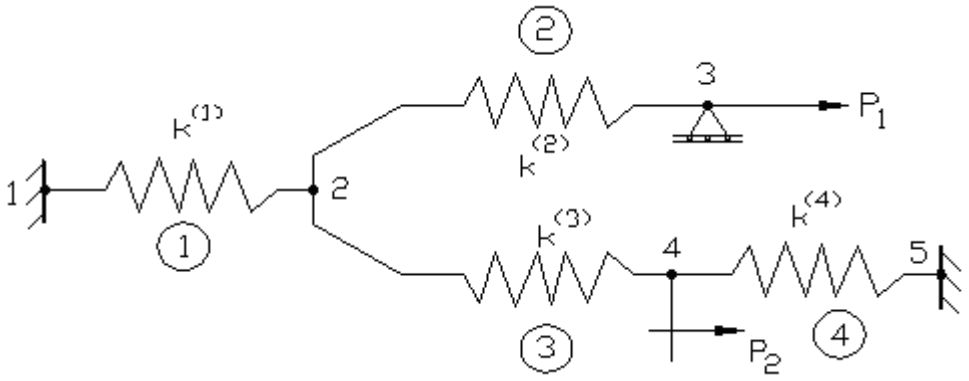


Fig.2.21 Sistema de resortes lineales.

Una vez establecido el esquema de numeración (el mostrado en la Fig.2.21 es sólo una de varias posibilidades), se debe crear la topología del sistema; es decir, se debe crear un registro que contenga los nodos que pertenecen a un elemento dado. Esta topología sirve para definir la

conectividad (llamada también incidencias de un elemento), de los elementos de la malla. En otras palabras, la conectividad identificará los elementos que están unidos entre sí.

A nivel de cada elemento, la conectividad no es más que la numeración ordenada de sus respectivos nodos. La Tabla 2.3 ilustra el sistema topológico que se estableció en el sistema de la Fig.2.21.

Por ejemplo, en dicha tabla se puede apreciar que el elemento 3 tiene asociados los nodos 2 y 4 y que el nodo 1 de dicho elemento (numeración local), es el nodo 2 del sistema (numeración global), mientras que el nodo 2 del mismo elemento, es el nodo 4 del sistema. Esta relación se puede apreciar en la Fig.2.22.

Tabla 2.3 Topología del sistema de resortes de la Fig.2.21.

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	2
	2	4
4	1	4
	2	5

Como ya se estableció, la matriz de rigidez de un resorte elástico-lineal viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

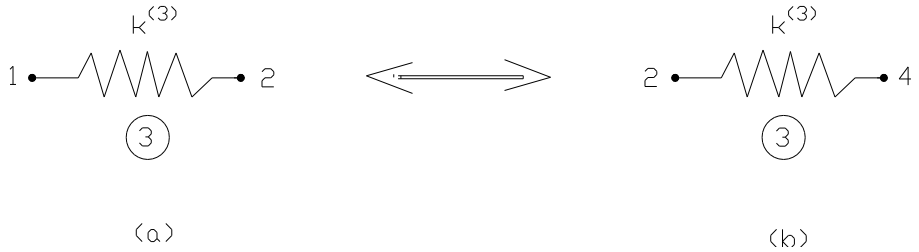


Fig.2.22 Topología asociada al elemento 3 del sistema de la Fig.2.21. (a) Numeración local; (b) Numeración global.

donde, $k_{11} = k_{22} = k$ y $k_{12} = k_{21} = -k$. Puesto que en este caso los sistemas local y global coinciden, no es necesario transformar estas ecuaciones.

Bajo una condición de carga dada, cada elemento así como también todo el sistema debe estar en equilibrio. Si se impone esta condición a un nodo genérico *i*, se tendrá:

$$\sum_{e} F_i^{(e)} = F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + F_i^{(3)} + \cdots\cdots = R_i \tag{2.85}$$

Esta ecuación establece que la suma de todas las fuerzas nodales en una dirección en el nodo *i*, es igual a la fuerza externa resultante aplicada en dicho nodo. Evaluando esta ecuación en cada nodo del sistema en estudio, y de acuerdo con el esquema de numeración de los nodos adoptado, se puede escribir el siguiente balance de fuerzas:

nodo 1:

$$\kappa_{11}^{(1)} U_1 + \kappa_{12}^{(1)} U_2 = F_1 \tag{2.86a}$$

nodo 2:

$$\kappa_{21}^{(1)} U_1 + \left(\kappa_{22}^{(1)} + \kappa_{11}^{(2)} + \kappa_{11}^{(3)}\right) U_2 + \kappa_{12}^{(2)} U_3 + \kappa_{12}^{(3)} U_4 = F_2 \tag{2.86b}$$

nodo 3:

$$\kappa_{21}^{(2)} U_2 + \kappa_{22}^{2} U_3 = F_3$$

nodo 4:

$$\kappa_{21}^{(3)} U_2 + \left(\kappa_{22}^{(3)} + \kappa_{11}^{(4)}\right) U_4 + \kappa_{12}^{(4)} U_5 = F_4 \tag{2.86c}$$

nodo 5:

$$\kappa_{21}^{(4)} U_4 + \kappa_{22}^{4} U_5 = F_5 \tag{2.86d}$$

donde:

$$U_1 = \overset{(1)}{u}_1 \quad ; \quad U_2 = \overset{(1)}{u}_2 = \overset{(2)}{u}_1 = \overset{(3)}{u}_1 \quad ; \quad U_3 = \overset{(2)}{u}_2 \quad ; \quad U_4 = \overset{(3)}{u}_2 = \overset{(4)}{u}_1 \quad ; \quad U_5 = \overset{(4)}{u}_2$$

$$F_1 = \overset{(1)}{f}_1 = R_1 \quad ; \quad F_2 = \overset{(1)}{f}_2 + \overset{(2)}{f}_1 + \overset{(3)}{f}_1 = 0 \quad ; \quad F_3 = \overset{(2)}{f}_2 = P_1$$
$$F_4 = \overset{(3)}{f}_2 = \overset{(4)}{f}_1 = P_2 \quad ; \quad F_5 = \overset{(4)}{f}_2 = R_5$$

Matricialmente, estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11}^{(1)} & \kappa_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{21}^{(1)} & \left(\kappa_{22}^{(1)} + \kappa_{11}^{(2)} + \kappa_{11}^{(3)}\right) & \kappa_{12}^{(2)} & \kappa_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & \kappa_{21}^{(2)} & \kappa_{22}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{21}^{(3)} & 0 & \left(\kappa_{22}^{(3)} + \kappa_{11}^{(4)}\right) & \kappa_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{21}^{(4)} & \kappa_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \\ R_5 \end{Bmatrix} \tag{2.87}$$

o, en forma compacta:

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{2.87}$$

donde $[K]$ es la matriz global del sistema, $\{U\}$ es el vector global de desplazamientos y $\{F\}$ es el vector global de cargas. La ec.(2.87) muestra que los coeficientes de rigidez de la matriz global, se obtienen de la suma directa de los coeficientes de rigidez individuales, en posiciones

"adecuadas" de la matriz global. El vector de cargas resultante del sistema, también se obtiene mediante la suma de las cargas individuales en las posiciones "adecuadas" de dicho vector. Este resultado sugiere que las matrices de los elementos pueden verse como sub-matrices del sistema global, y que éste puede obtenerse mediante la simple suma de las matrices locales. Esta es la esencia del procedimiento general del ensamblaje en el **mef**.

Una forma de efectuar el procedimiento descrito, consiste en expandir los coeficientes de rigidez de cada elemento en la posición adecuada (mediante la topología del sistema), de una matriz de *n* x *n* nula, donde *n* es el número total de grados de libertad presentes en el sistema (i.e., el número total de nodos multiplicado por el número de grados de libertad por nodo). Así, puesto que el sistema en estudio posee cinco grados de libertad, dicha matriz será de 5 x 5. Luego, para el elemento 1, puesto que las numeraciones local y global coinciden (ver Tabla 2.3), se tiene:

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

donde $[K]^{(1)}$ es la matriz expandida del elemento 1.

Para el elemento 2, la correspondencia entre las numeraciones local y global es:

$$\begin{array}{ccc} \text{local} & \Rightarrow & \text{global} \\ k_{11}^{(2)} & \Rightarrow & K_{22} \\ k_{12}^{(2)} & \Rightarrow & K_{23} \\ k_{21}^{(2)} & \Rightarrow & K_{32} \\ k_{22}^{(2)} & \Rightarrow & K_{33} \end{array}$$

Cuando estos coeficientes se insieren en la matriz expandida, se tiene:

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

De igual modo para el elemento 3:

$$[K]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(3)}_{11} & 0 & k^{(3)}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(3)}_{21} & 0 & k^{(3)}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

y, finalmente, para el elemento 4:

$$[K]^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{(4)}_{11} & k^{(4)}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & k^{(4)}_{21} & k^{(4)}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

Ahora se puede observar que la matriz global del sistema (2.87) se puede obtener fácilmente mediante la suma de las ecs.(2.89) $\rightarrow$ (2.92), las cuales representan la contribución de cada elemento; es decir, el procedimiento del ensamblado consiste en:

$$[K] = \sum_{e=1}^{M=4} [K]^{(e)} = [K]^{(1)} + [K]^{(2)} + [K]^{(3)} + [K]^{(4)} \tag{2.93}$$

donde M es el número total de elementos.

Para determinar el vector global de cargas se sigue exactamente el mismo procedimiento; es decir:

$$\{\ \} = \sum_{e=1}^{M=4} \begin{Bmatrix} (e) \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \\ f \end{Bmatrix}^{(1)} + \begin{Bmatrix} \\ f \end{Bmatrix}^{(2)} + \begin{Bmatrix} \\ f \end{Bmatrix}^{(3)} + \begin{Bmatrix} \\ f \end{Bmatrix}^{(4)} \tag{2.94}$$

2.6.2.- Procedimiento general del ensamblaje

A pesar que el procedimiento de ensamblado se presentó tomando como base un ejemplo muy simple, éste es completamente general y se aplica a cualquier sistema que sea analizado mediante el **mef**. En el ejemplo anterior se efectuó el ensamblado a mano, pero en un problema real de ingeniería, que envuelva cientos o miles de elementos (situación que se presenta muy fácilmente), el procedimiento deberá realizarse a través de un computador. Omitiendo consideraciones especiales que mejoran la eficiencia computacional, el procedimiento general de ensamblaje se resume a continuación:

1. Se establece la matriz global de *n* x *n* y el vector global de cargas de *n* x 1, ambos inicialmente nulos, donde *n* es el número de grados de libertad del sistema.
2. Empezando con el primer elemento, si los sistemas local y global no coinciden, se transforman las ecuaciones del elemento desde el sistema local, al sistema global de referencia.

3. Usando la topología del sistema, se insieren en la matriz y vector de cargas global, los términos correspondientes a la matriz de rigidez y al vector de cargas, respectivamente, y se efectúa la suma correspondiente, de acuerdo con las ecs.(2.93) y (2.94).
4. Se vuelve al paso 2 y se repite el procedimiento para todos los elementos del sistema.

La generalidad de este proceso de ensamblaje en el **mef** ofrece una gran ventaja: una vez desarrollado un programa computacional que realice este proceso para una clase de problema en particular, puede usarse en la solución de cualquier otra clase de problemas.

2.6.3.- Características de la matriz ensamblada

Afortunadamente, en la mayoría de las aplicaciones de interés práctico, se obtienen sistemas de ecuaciones que debido a su naturaleza, pueden resolverse mediante técnicas que toman en consideración las características "amigables" de dichos sistemas. En general, las matrices de rigidez, tanto locales como globales, son *simétricas* y en *banda*, como la matriz del sistema (2.87). En la Fig.2.23 se muestra la forma general de una matriz de este tipo. Los elementos distintos de cero están dispuestos (únicamente), en el área sombreada de la matriz n x n. Por lo tanto el *ancho de banda* será igual $2LB-1$, donde LB es el *semi-ancho de banda*.

Se puede economizar memoria computacional si se toma en consideración la simetría de la matriz global del sistema y el hecho que ésta sea una matriz en banda. En este caso, solamente es necesario almacenar los n x LB coeficientes de la matriz.

Cabe destacar que para sistemas extremadamente grandes, incluso este método de almacenamiento puede resultar inadecuado, siendo necesario la división de la matriz n x LB en bloques, lo cual requiere, desde el punto de vista computacional, de algoritmos numéricos muy sofisticados.

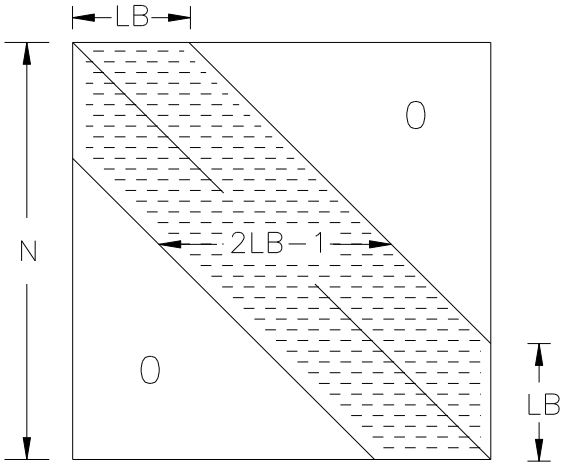


Fig.2.23 Representación esquemática de una matriz en banda.

De lo anterior se infiere la importancia de determinar el semi-ancho de banda para un problema dado. Más aun, como se verá a continuación, el ancho de banda depende de la forma como se numeren los nodos de la malla.

Considérese, por ejemplo, las dos discretizaciones que se muestran en la Fig.2.24.

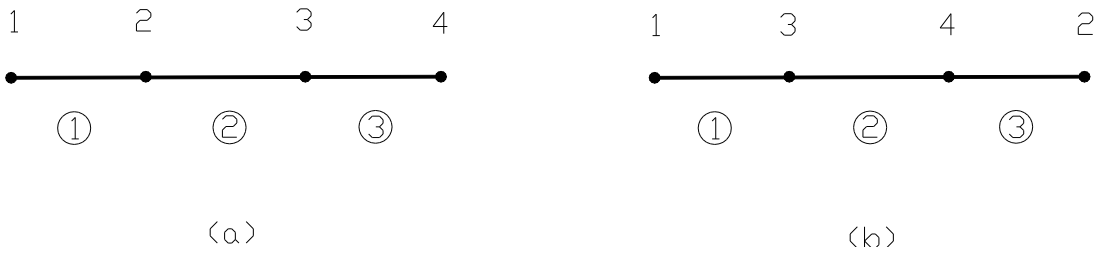


Fig.2.24 Diferentes numeraciones nodales de una misma discretización

En ambos casos se tienen tres elementos de dos nodos por elemento y se considerará, para facilitar la presentación, un solo grado de libertad por nodo. Entonces, cada una de las tres matrices de este sistema es de 4 x 4. La topología de ambos sistemas es:

Caso (a)		
Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4

Caso (b)		
Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	3
2	1	3
	2	4
3	1	4
	2	2

Con esta topología, la matriz global para el caso (a) es:

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)}+k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

cuyo semi-ancho de banda es igual a 2 (i.e., el máximo número de coeficientes distintos de cero a la izquierda o derecha de la diagonal principal es igual a 1). La matriz global para el caso (b) es:

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & 0 & k_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & k_{22}^{(3)} & 0 & k_{21}^{(3)} \\ k_{21}^{(1)} & 0 & k_{22}^{(1)}+k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{12}^{(3)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)}+k_{11}^{(3)} \end{bmatrix}$$

cuyo semi-ancho de banda es 3. De donde se concluye que la numeración en el caso (a) es más eficiente que en el caso (b).

La forma de calcular el semi-ancho de banda es:

$$LB = (MDN + 1) \times NGLN \tag{2.95}$$

donde, MDN es la máxima diferencia nodal en un elemento cualquiera de la malla y NGLN es el número de grados de libertad por nodo. Así, para el caso (a), LB = (1 + 1) x 1 = 2 y para el caso (b) LB = (2 +1) x 1 = 3.

Estos sencillos ejemplos muestran la importancia de numerar los nodos de la malla en una forma eficiente, puesto que su incidencia en el ancho de banda es directa, y este valor incide, a su vez, en la cantidad de memoria a utilizar en la solución de un problema dado, y el tiempo computacional utilizado en la solución del sistema de ecuaciones resultante.

En un sistema de ecuaciones grande, una numeración eficiente de los nodos sólo se podrá lograr a través de la minimización automática del ancho de banda. Un programa de computación eficiente debe contar con una subrutina que efectúe dicha minimización, a través de una renumeración nodal. En la literatura especializada existe una gran cantidad de artículos y publicaciones al respecto.

2.7.- Introducción de las condiciones de contorno.

Tanto las matrices locales de los elementos, como las matrices globales de los sistemas completos son singulares; es decir, no se puede determinar su inversa ya que su determinante es cero. De modo que el sistema de ecuaciones resultante de un problema dado, no podrá ser resuelto hasta que no sea previamente modificado, a través de las condiciones de contorno.

En el sistema de resortes estudiado en la sección anterior, el campo de desplazamientos (i.e., el conjunto de desplazamientos nodales), no puede determinarse, a menos que se fije un número suficiente de desplazamientos que remuevan los desplazamientos de cuerpo rígido presentes en el sistema, cuando sobre éste se ejerza el conjunto de cargas externas. Como se puede apreciar en la Fig.2.21, este requerimiento queda satisfecho con las condiciones $U_1 = 0$ y $U_5 = 0$.

El número de las variables a especificar depende de cada problema en particular y pueden ser especificadas tanto en los nodos interiores como en los nodos del contorno, pero para un nodo cuyas coordenadas están fijas, es físicamente imposible especificar, simultáneamente, U_i y F_i.

Existen diferentes formas de introducir las condiciones de contorno en el sistema global de ecuaciones. Independientemente de la forma seleccionada, tanto el número de incógnitas nodales, como el número de ecuaciones a resolver, se reducen efectivamente. Sin embargo, resulta más conveniente, computacionalmente hablando, introducir las variables conocidas de tal modo que deje el número de ecuaciones original inalterado y evitar de este modo, complicadas reestructuraciones de la matriz global de rigidez. A continuación se describen dos de estas formas:

En la primera, si i es el suscrito de una variable nodal prescrita del sistema global $\overset{nxn}{[K]}\overset{nx1}{\{U\}} = \overset{nx1}{\{F\}}$, la i-ésima fila y la i-ésima columna de $[K]$ se hacen iguales a cero y K_{ii} se hace igual a la unidad. El término F_i del vector $\{F\}$ se reemplaza por el valor conocido U_i.

Cada uno de los $n-1$ términos restantes de $\{F\}$ se modifican restando de su respectivo valor, el valor de la variable prescrita multiplicado por el término correspondiente de la matriz $[K]$ original. Este proceso se repite para cada U_i prescrito, presente en el problema.
Para ilustrar este procedimiento, considérese el siguiente ejemplo:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{2.96}$$

Supóngase, en este hipotético ejemplo, que se especifican las variables nodales $U_2 = \alpha_2$ y $U_4 = \alpha_4$. Con el procedimiento descrito, el sistema anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - k_{12} \times \alpha_2 - k_{14} \times \alpha_4 \\ \alpha_2 \\ F_3 - k_{32} \times \alpha_2 - k_{34} \times \alpha_4 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{2.97}$$

Este conjunto de ecuaciones, inalterado, puede ahora resolverse, fácilmente, para todas las variables nodales. La solución, por supuesto, establece que $U_2 = \alpha_2$ y $U_4 = \alpha_4$, debiéndose determinar las incógnitas U_1 y U_3.

En la segunda, el término de la diagonal de $[K]$, asociado con la variable nodal especificada, se multiplica por un número muy grande, por ejemplo 10^{15}, mientras que el término correspondiente en $\{F\}$ es reemplazado por la variable nodal especificada, multiplicada por el mismo factor del término de la diagonal correspondiente. Este procedimiento se repite para todas las variables prescritas presentes en el problema. Efectivamente, este método hace que los términos no modificados de $[K]$ sean muy pequeños comparados con los términos modificados (aquellos asociados con las variables nodales especificadas). Después que estas modificaciones se realizan, se procede a resolver el sistema completo de ecuaciones. Usando este procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones original del ejemplo previo, se tiene:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22}x10^{15} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44}x10^{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \alpha_2 \times K_{22} \times 10^{15} \\ F_3 \\ \alpha_4 \times K_{44} \times 10^{15} \end{Bmatrix} \tag{2.98}$$

Para mostrar la efectividad de este procedimiento, considérese la segunda ecuación del conjunto anterior:

$$K_{21}U_1 + K_{22}U_2x10^{15} + K_{23}U_3 + K_{24}U_4 = \alpha_2 \times K_{22} \times 10^{15} \tag{2.99}$$

para propósitos prácticos, esta ecuación expresa que $U_2 = \alpha_2$, ya que $K_{22} \times 10^{15} \rangle\rangle K_{ij}$ para j=1,3,4.

Este procedimiento es un poco más fácil de implantar en un programa computacional que el primero. Ambos métodos preservan las propiedades (simetría, banda, etc.), de la matriz original del sistema.

2.8.- Vector de cargas nodales equivalentes en el método directo.

El cálculo de los desplazamientos en una estructura obtenidos mediante el **mef,** o cualquier método matricial de análisis estructural, requiere que ésta esté sujeta a cargas que actúen únicamente en los nodos de la misma. Sin embargo, en general, las cargas reales que actúan sobre una estructura no cumplen con este requisito, si no que actúan directamente sobre los elementos de la misma. En este caso, dichas cargas deben reemplazarse por cargas estáticamente equivalentes que actúen en los nodos y que produzcan los mismos desplazamientos en la estructura que las cargas reales. Las cargas nodales que se determinan a partir de las cargas sobre los elementos, reciben el nombre de *cargas nodales equivalentes*. El procedimiento para el cálculo de las cargas nodales equivalentes se resume en el ejemplo mostrado en la Fig.2.25.

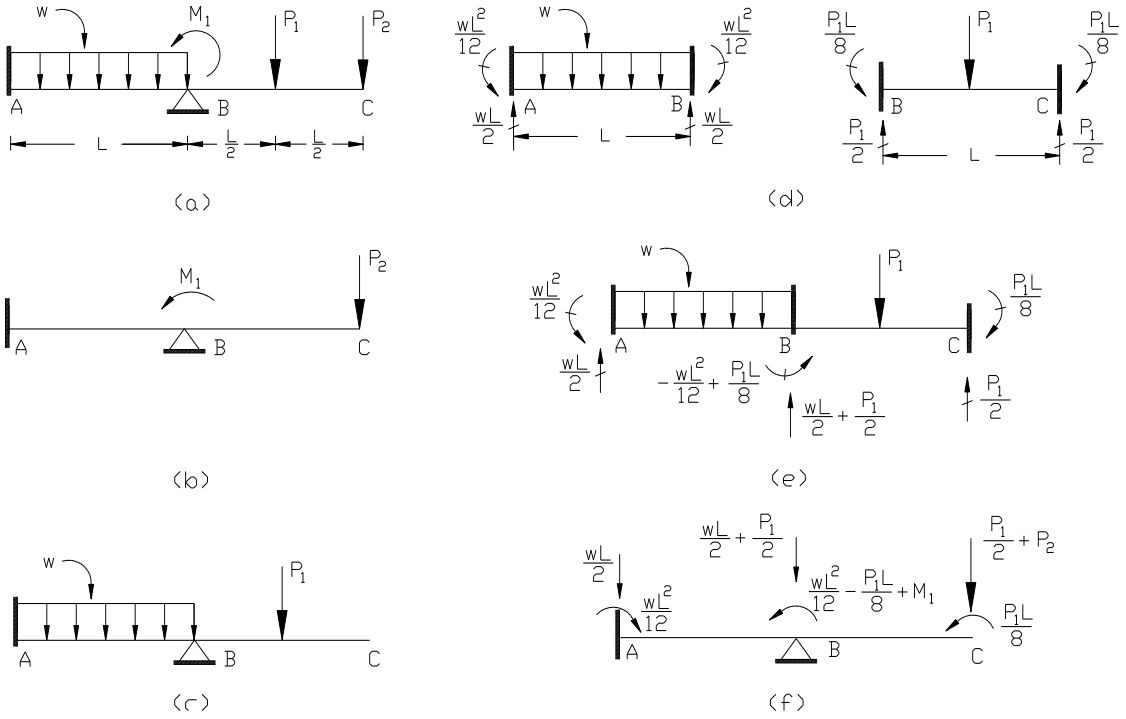


Fig.2.25 Cargas sobre los elementos y los nodos y vector de cargas nodales equivalentes.

La Fig.2.25a muestra una viga ABC apoyada en los nodos A y B y sujeta a varias cargas. Algunas de éstas actúan directamente sobre los nodos, tal como se muestra en la Fig.2.25b, en tanto que las cargas restantes lo hacen sobre los elementos de la estructura, tal como se muestra en la Fig.2.25c. Para efectuar la sustitución de éstas últimas por las respectivas cargas nodales equivalentes, se fijan los nodos de la estructura contra todos los desplazamientos posibles. Para la viga mostrada, este procedimiento da como resultado dos vigas doblemente empotradas, tal

como se muestra en la Fig.2.25d. Cuando estas vigas están sujetas a las cargas que actúan sobre los elementos, se produce un conjunto de acciones sobre los empotramientos, las cuales se pueden obtener siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para determinar los coeficientes de rigidez de la ec.(2.11), y que para este caso particular se muestran en la Fig.2.25d. Estas mismas acciones de empotramiento se muestran en la Fig.2.25e, donde se representan como acciones de empotramiento para la estructura fija. Invirtiendo el sentido de estas acciones, se obtiene finalmente un conjunto de acciones que son estáticamente equivalentes a las cargas que actúan sobre los elementos. Este conjunto de acciones, al sumarse al conjunto de cargas que actúan sobre los nodos que se muestran en la Fig.2.25b, constituyen el conjunto de cargas combinadas que se muestra en la Fig.2.25f.

Como ya se mencionó, los desplazamientos de la estructura bajo la acción de las cargas combinadas, deben ser los mismos que los producidos por las cargas reales. Para observar que este requisito se satisfaga, considérese de nuevo la viga de la Fig.2.25. Observando dicha figura, se nota que la superposición de las cargas combinadas mostradas (Fig.2.25f) y las acciones sobre la estructura fija (Fig.2.25e), da las cargas reales sobre la estructura (Fig.2.25a). Se concluye entonces que la superposición de los desplazamientos de los nodos, en las vigas de la Fig.2.25e y de la Fig.2.25f, debe reproducir los desplazamientos de los nodos en la viga real. Pero, como todos los desplazamientos de los nodos de la viga fija son cero, es evidente que los desplazamientos de los nodos en la viga sujeta a las cargas reales, así como los de las cargas combinadas son iguales.

Adicionalmente, las reacciones en los apoyos de la estructura sujeta a las cargas combinadas, son las mismas que las reacciones causadas por las cargas reales. Esta conclusión también puede verificarse por superposición de las acciones de las vigas de la Fig.2.25e y de la Fig.2.25f. Todas las acciones de empotramiento en la Fig.2.25e se equilibran con las cargas nodales equivalentes iguales y opuestas que actúan sobre la viga de la Fig.2.25f. Por lo tanto, las reacciones de la viga con las cargas combinadas, son las mismas que para la viga con las cargas reales (Fig.2.25a).

Las dos conclusiones presentadas se aplican a todos los tipos de estructuras reticulares. En contraste con estas conclusiones, las acciones en los nodos de los elementos causadas por las cargas nodales equivalentes que actúan sobre la estructura, usualmente no son las mismas que las causadas por las cargas reales. En lugar de ello, las acciones en los nodos de los elementos debidas a las cargas reales, deben obtenerse sumando las acciones en los nodos del elemento de la estructura fija, a las causadas por las cargas combinadas. Por ejemplo, en el caso presentado, las acciones reales en los nodos (Fig.2.25a), se obtienen sobreponiendo las acciones en los nodos de los elementos de las vigas de las Figs.2.25e y 2.25f.

2.9.- Ejemplos de la mecánica estructural.

En esta sección se presentará la solución de algunos ejemplos sencillos de la mecánica de sólidos. La solución de tales problemas sigue la misma secuencia de cualquier programa computacional dedicado a la solución de problemas a través del **mef**, de tal modo que el lector pueda ir familiarizándose con la construcción de un programa de esta naturaleza.

2.9.1.-Ejemplo 2.1. Elemento unidimensional sometido a carga axial.

Considérese el sistema mostrado en la Fig.e2.1.1a, el cual corresponde a un problema de la mecánica de sólidos y consta de un elemento de aluminio ($A_x = 5000\,mm^2$ y $E = 70\,GPa$) y una elemento de acero ($A_x = 800\,mm^2$ y $E = 200\,GPa$). La fuerza $F = 20\,KN$ está aplicada en la sección que une dichas barras.

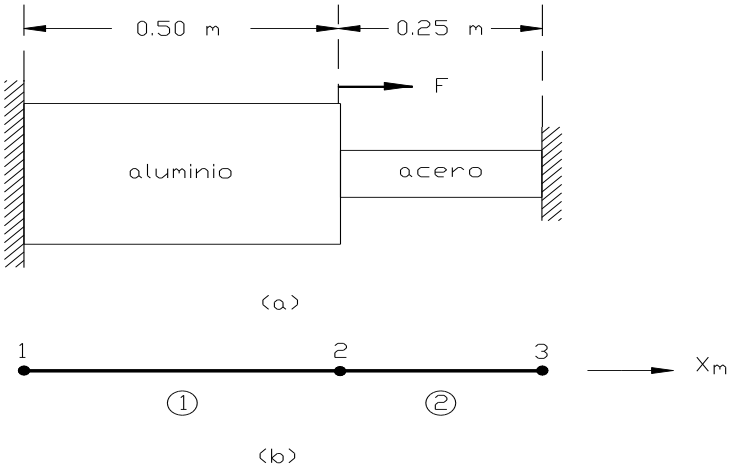


Fig.e2.1.1 Elementos unidimensionales sometidos a carga axial.

El objetivo de este problema consiste en determinar el desplazamiento del punto de unión de las dos barras mostradas, así como también la fuerza y esfuerzo que se genera en cada barra.

Como ya se describió, la solución sigue los siguientes pasos:

a.- **Discretización del dominio.**

En la Fig.e2.1.1b, se muestra una discretización conveniente del dominio del problema dado, que considera tanto la localización de la carga externa, como la discontinuidad de la geometría y de las propiedades mecánicas presentes en el problema. Dicha discretización consta de dos elementos axiales, de dos nodos por elemento. La topología del sistema es:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez.

La matriz local de rigidez de este elemento fue deducida en la sección 2.2a y viene dada por la ec.(2.9):

$$\frac{A_x E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

para este caso:

$$\left(\frac{A_x E}{L}\right)^{(1)} = \frac{5000 \times 70}{500} = 700.0 \text{ KN / m m}$$

$$\left(\frac{A_x E}{L}\right)^{(2)} = \frac{800 \text{ x } 200}{250} = 640.0 \text{ KN / m m}$$

luego, para el elemento 1 se tiene:

$$700.0\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{b}$$

y para el elemento 2:

$$640.0\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_1^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{c}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales.

En este caso, puesto que los sistemas locales y globales de referencia coinciden, no es necesario transformar las ecs.(b) y (c) antes de proceder con el ensamblaje de las mismas. Así, de acuerdo con la topología del sistema, el ensamblaje de dichas ecuaciones en la matriz global del sistema conduce a:

$$\begin{bmatrix} 700.0 & -700.0 & 0.0 \\ -700.0 & (700.0 + 640.0) & -640.0 \\ 0.0 & -640.0 & 640.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ 20.0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno se introducirán mediante la técnica de ceros y unos descrita anteriormente. Así, el sistema anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1340.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 20.0 + 700.0 \text{ x } 0 + 640.0 \text{ x } 0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 20.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

cuya solución es: $U_2 = 0.014925 \text{ m m}$..

e.- Cálculo de las fuerzas en los nodos de los elementos.

Una vez conocida U_2, las fuerzas en los nodos de cada elemento se determinan a partir de las ecs.(b) y (c); es decir:

$$700.0\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.014925 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$f_1^{(1)} = -700.0 \times 0.014925 = -10.448 \text{ KN}$$

$$f_2^{(1)} = 10.448 \text{ KN}$$

del sistema (c):

$$640.0\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.014925 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$f_1^{(2)} = 640.0 \times 0.014925 = 9.552\,\text{KN} \quad \text{y} \quad f_2^{(1)} = -9.552\,\text{KN}.$$

Las componentes del vector global de cargas viene dado por:

$$F_1 = f_1^{(1)} - 10.448 \text{ KN y } F_3 = f_2^{(2)} = -9.552 \text{ KN}$$

y es fácil verificar que:

$$F_2 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)} = 20 \text{ KN}$$

f.- Cálculo de los esfuerzos.

Finalmente, los esfuerzos en ambos elementos se determinan mediante la ec.(2.20):

$$\sigma_x = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

para el elemento 1:

$$\sigma_x = 70.0\begin{bmatrix} -1/500 & 1/500 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.014925 \end{Bmatrix} = +2.089 \text{ MPa}$$

y para el elemento 2:

$$\sigma_x = 200.0\begin{bmatrix} -1/250 & 1/250 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.014925 \\ 0 \end{Bmatrix} = -11.94 \text{ MPa}$$

Con el objeto de ilustrar el proceso de transformación de las matrices locales de los elementos en sus respectivas matrices globales, antes de efectuar el ensamblaje de todos los elementos, cuando los sistemas de referencia local y global no coinciden, se resolverá el siguiente ejemplo.

2.9.2.-Ejemplo 2.2. Elementos de armadura plana.

Considérese la armadura plana mostrada en la Fig.e2.2.1a. Los elementos AB y AC son de aluminio ($E=70\,GPa$) y el área de la sección transversal de ambos es de $A_x=400\,mm^2$. El elemento BC es de acero ($E=200\,GPa$) y el área de su sección transversal es de $A_x=200\,mm^2$. Se desea determinar los desplazamientos de los nodos 1 y 3, las fuerzas nodales y los esfuerzos en cada elemento para F = 1.0 KN.

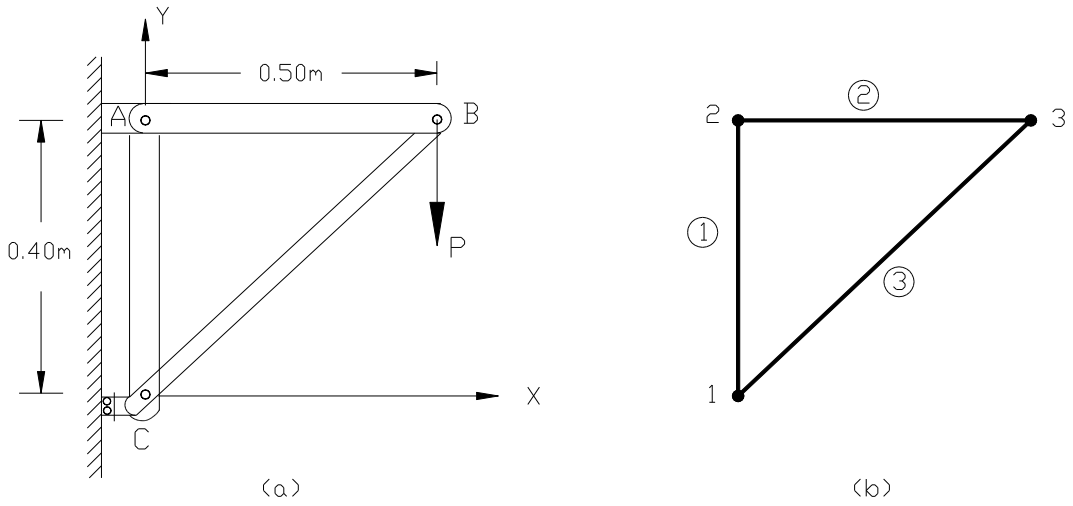


Fig.e2.2.1 Armadura plana y su discretización en elementos finitos.

a.- Discretización del dominio

La Fig.e2.2.1b muestra la discretización del dominio del problema, la cual está constituida por tres elementos finitos de armadura plana. La topología del sistema seleccionada es:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	1
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez

En este caso, la matriz local de rigidez viene dada por la ec.(2.10):

$$\frac{A_x E}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Para el elemento 1:

$$\left(\frac{A_x E}{L}\right)^{(1)} = \frac{400 \times 70}{400} = 70.0 \ \text{KN/m m}$$

Para el elemento 2:

$$\left(\frac{A_x E}{L}\right)^{(2)} = \frac{400 \times 70}{500} = 56.0 \ \text{KN/m m}$$

Para el elemento 3, se debe, en primer lugar determinar su longitud; es decir:

$$L^{(3)} = \left[\left(x_3 - x_1\right)^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2\right]^{1/2} = \left[(0.50)^2 + (0.40 - 0)^2\right] = 0.64 \,\text{m}$$

y por lo tanto:

$$\left(\frac{A_x E}{L}\right)^{(3)} = \frac{200 \times 200}{640} = 62.5 \ \text{KN/m m}$$

Luego, las matrices de rigidez locales de este problema son:

$$\left[\kappa_M\right]^{(1)} = 70.0\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b1)}$$

$$\left[\kappa_M\right]^{(2)} = 56.0\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b2)}$$

$$\left[\kappa_M\right]^{(3)} = 62.5\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b3)}$$

c.-Ensamblaje de las matrices locales

Puesto que en este ejemplo, los sistemas de referencia (elementos 1 y 3) locales y globales no coinciden, antes de proceder al ensamblaje de las matrices locales de rigidez, se hace necesario, de acuerdo con lo establecido en la sección 4, transformar las ecs.(b1 y b3) al sistema

global de referencia, lo cual se hará mediante el uso de las respectivas matrices de rotación. En general, de acuerdo con la ec.(2.83), la matriz de rotación viene dada por:

$$\left[R_T\right]=\begin{bmatrix}[R] & [0]\\ [0] & [R]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 & 0\\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha\\ 0 & 0 & -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

En realidad, para el elemento 2 no es necesario efectuar esta operación. Sin embargo, con el objetivo de mostrar la secuencia de un programa computacional, se efectuarán todos los cálculos, sobre los tres elementos, tal como lo realizaría dicho programa. Entonces, para el elemento 1:

$$\left[R_T\right]^{(1)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \tag{c1}$$

para el elemento 2:

$$\left[R_T\right]^{(2)}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{c2}$$

y para el elemento 3:

$$\left[R_T\right]^{(3)}=\begin{bmatrix}0.781 & 0.625 & 0.0 & 0.0\\ -0.625 & 0.781 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.781 & 0.625\\ 0.0 & 0.0 & -0.625 & 0.781\end{bmatrix} \tag{c3}$$

De acuerdo con la ec.(2.83), las matrices de rigidez, con respecto al sistema global de referencia, vienen dadas por:

$$\left[K_S\right]=\left[R_T\right]^T\left[\kappa_M\right]\left[R_T\right]$$

Finalmente, efectuando la multiplicación de matrices indicadas en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\left[\kappa_S\right]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 70.0 & 0.0 & -70.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -70.0 & 0.0 & 70.0 \end{bmatrix} \tag{d1}$$

$$\left[\kappa_S\right]^{(2)} = \begin{bmatrix} 56.0 & 0.0 & -56.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -56.0 & 0.0 & 56.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \tag{d2}$$

$$\left[\kappa_S\right]^{(3)} = \begin{bmatrix} 38.1 & 30.5 & -38.1 & -30.5 \\ 30.5 & 24.4 & -30.5 & -24.4 \\ -38.1 & -30.5 & 38.1 & 30.5 \\ -30.5 & -24.4 & 30.5 & 24.4 \end{bmatrix} \tag{d3}$$

De acuerdo con la topología seleccionada, la matriz global del sistema viene dada por:

$$\begin{bmatrix} 38.1 & 30.5 & 0.0 & 0.0 & -38.1 & -30.5 \\ 30.5 & (70.0+24.4) & 0.0 & -70.0 & -30.5 & -24.4 \\ 0.0 & 0.0 & 56.0 & 0.0 & -56.0 & 0.0 \\ 0.0 & -70.0 & 0.0 & 70.0 & 0.0 & 0.0 \\ -38.1 & -30.5 & -56.0 & 0.0 & (56.0+38.1) & 30.5 \\ -30.5 & -24.4 & 0.0 & 0.0 & 30.5 & 24.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} == \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0. \\ -1.0 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno

Al introducir las condiciones de contorno, este sistema queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 94.4 & 0 & 0 & -30.5 & -24.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -30.5 & 0 & 0 & 94.1 & 30.5 \\ 0 & -24.4 & 0 & 0 & 30.5 & 24.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0-30.5x0-0x0+70.0x0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0+38.1x0+56.0x0-0x0 \\ -1.0+30.5x0-0x0-0x0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -1.0 \end{Bmatrix} \text{(f)}$$

cuya solución es:

$U_1 = U_2 = V_2 = 0$, $V_1 = -0.014286$ mm , $U_3 = 0.022321$ mm , $V_3 = -0.083208$ mm

e.- Cálculo de las fuerzas en los nodos de los elementos

De acuerdo con la ec.(2.80), las fuerzas en los nodos, con relación al sistema local de referencia, de los elementos vienen dadas, en general, por:

$$\begin{Bmatrix} \{f_{Mi}\} \\ \{f_{Mj}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\kappa_{Mii}] & [\kappa_{Mij}] \\ [\kappa_{Mji}] & [\kappa_{Mjj}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_i\} \\ \{U_j\} \end{Bmatrix}$$

Luego, para el elemento 1 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.00 & 0.00 & -70.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -70.00 & 0.00 & 70.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -0.014286 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

para el elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.0 & 0.00 & -56.0 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -56.0 & 0.00 & 56 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.25 \\ 0.00 \\ 1.25 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

y para el elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.5 & 0.00 & -62.5 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -62.5 & 0.00 & 62.5 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.781 & 0.625 & 0.00 & 0.00 \\ -0.625 & 0.781 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.781 & 0.625 \\ 0.00 & 0.00 & -0.625 & 0.781 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00 \\ -0.014286 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.60 \\ 0.00 \\ -1.60 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas calculadas vienen expresadas en KN.

f.- Cálculo de los esfuerzos

Como ya se mencionó anteriormente, los sistemas de referencia (elementos 1 y 3) locales y globales no coinciden. Por lo tanto, para poder calcular los esfuerzos, se debe determinar las componentes de los desplazamientos previamente calculadas (las cuales están asociadas al sistema global de referencia), con respecto al sistema local de referencia. En forma general, esta transformación viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} \{u_i\} \\ \{v_i\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_i\} \\ \{V_j\} \end{Bmatrix}$$

Así, para el elemento 1 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -0.14286 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.14286 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Luego, al igual que en el ejemplo anterior, el esfuerzo viene dado por:

$$\sigma_x = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 70.0\begin{bmatrix} -1/400 & 1/400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.14286 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = +2.50 \text{ MPa}$$

para el elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_x = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 70.0\begin{bmatrix} -1/500 & 1/500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.022321 \end{Bmatrix} = +3.125 \text{ MPa}$$

y para el elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.625 & 0.0 & 0.0 \\ -0.625 & 0.781 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.781 & 0.625 \\ 0.0 & 0.0 & -0.625 & 0.781 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -0.14286 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.008928 \\ 0.011157 \\ -0.034573 \\ 0.078940 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_x = E\begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 70.0\begin{bmatrix} -1/640 & 1/640 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.008928 \\ -0.034573 \end{Bmatrix} = -8.00 \text{ MPa}$$

2.9.3.-Ejemplo 2.3. Elemento de viga uniforme de eje recto

En la Fig.e2.3.1a se muestra una viga continua y homogénea , de eje recto, sometida al estado de cargas indicado. Se desea determinar el campo de los desplazamientos, las acciones que se ejercen en los extremos de cada uno de los elementos, así como también las reacciones sobre los soportes. Para el elemento 1: $I_Z = 100\times10^6 \text{ mm}^4$; para el elemento 2: $I_Z = 200\times10^6 \text{ mm}^4$; y para el elemento 3: $I_Z = 300\times10^6 \text{ mm}^4$. Las cargas son: $P_1 = 10\,\text{KN}$, $P_2 = 20\,\text{KN}$, $M_Z = 40\,\text{KN}-\text{m}$, $\omega = 12\,\text{KN/m}$. El módulo de elasticidad para toda la viga es: $E = 200$ GPa, y $L = 1.0\,\text{m}$.

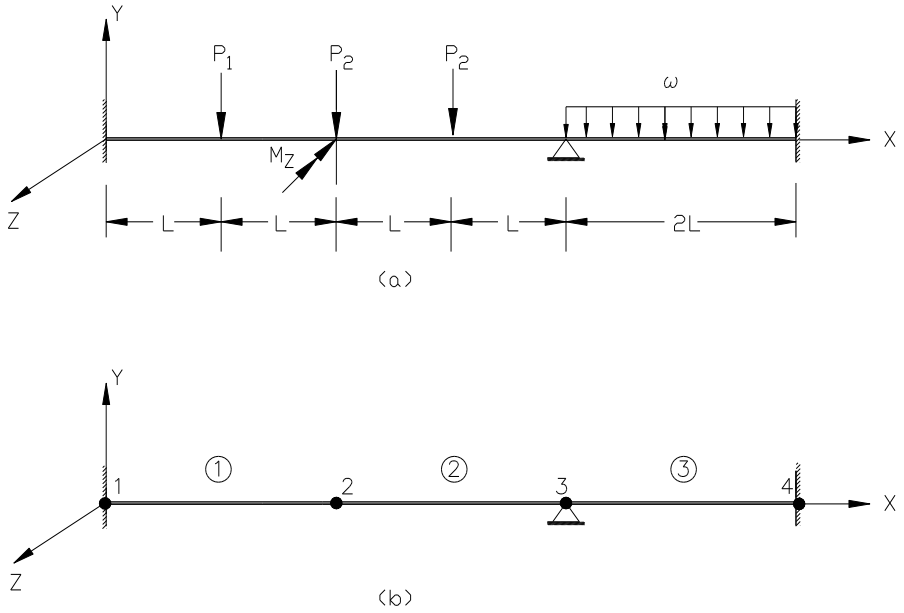


Fig.e2.3.1 Viga continua y su discretización en elementos finitos.

a.- Discretización del dominio

En la Fig.e2.3.1b se muestra la discretización de la viga en elementos finitos, la cual está constituida por tres elementos de viga de eje recto. La topología del sistema es:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez

Como se estableció, en la sección 2.4.2, (ec.2.32), la matriz de rigidez de este elemento es:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Luego para elemento 1:

$$[k_M]^{(1)} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 \\ 0.30 & 0.40 & -0.30 & 0.20 \\ -0.30 & -0.30 & 0.30 & -0.30 \\ 0.30 & 0.20 & -0.30 & 0.40 \end{bmatrix} \quad \text{(b1)}$$

para el elemento 2:

$$[k_M]^{(2)} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.60 & 0.60 & -0.60 & 0.60 \\ 0.60 & 0.80 & -0.60 & 0.40 \\ -0.60 & -0.60 & 0.60 & -0.60 \\ 0.60 & 0.40 & -0.60 & 0.80 \end{bmatrix} \quad \text{(b2)}$$

y para el elemento 3:

$$[k_M]^{(1)} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.90 & 0.90 & -0.90 & 0.90 \\ 0.90 & 1.20 & -0.90 & 0.60 \\ -0.90 & -0.90 & 0.90 & -0.90 \\ 0.90 & 0.60 & -0.90 & 1.20 \end{bmatrix} \quad \text{(b3)}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales

En este ejemplo, de nuevo, los sistemas de referencia local y global coinciden, y por lo tanto no es necesario transformar las ecs. (b), desde el sistema local de referencia al global. De modo que, de acuerdo con la topología seleccionada, el ensamblaje de las matrices de rigidez locales de los elementos conduce a:

$$[K] = 10^8 \begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.40 & -0.30 & 0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & 0.90 & 0.30 & -0.60 & 0.60 & 0.00 & 0.00 \\ & & & 1.20 & -0.60 & 0.40 & 0.00 & 0.00 \\ & & & & 1.50 & 0.30 & -0.90 & 0.90 \\ & & & & & 2.00 & -0.90 & 0.60 \\ & & & & & & 0.90 & -0.90 \\ & & & & & & & 1.20 \end{bmatrix} \quad \text{(c)}$$

d.- Vector de cargas nodales equivalente

Como se puede observar, en este caso, las cargas no están aplicadas únicamente sobre los nodos, si no que también, se ejercen cargas directamente sobre los elementos, de modo que se hace necesario construir el respectivo vector de cargas nodales equivalentes.

El vector de cargas asociado a las acciones externas aplicadas directamente sobre los nodos, es el siguiente:

$$\{F_1\}^T = \{0.0 \quad 0.0 \quad -20.0 \quad -40.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0\} \quad \text{(d)}$$

De acuerdo con la sección 2.8, los vectores de cargas nodales equivalentes para cada elemento, correspondientes a las acciones que se ejercen directamente sobre los mismos, vienen dados, tal como se muestra en la Fig.e2.3.2, por:

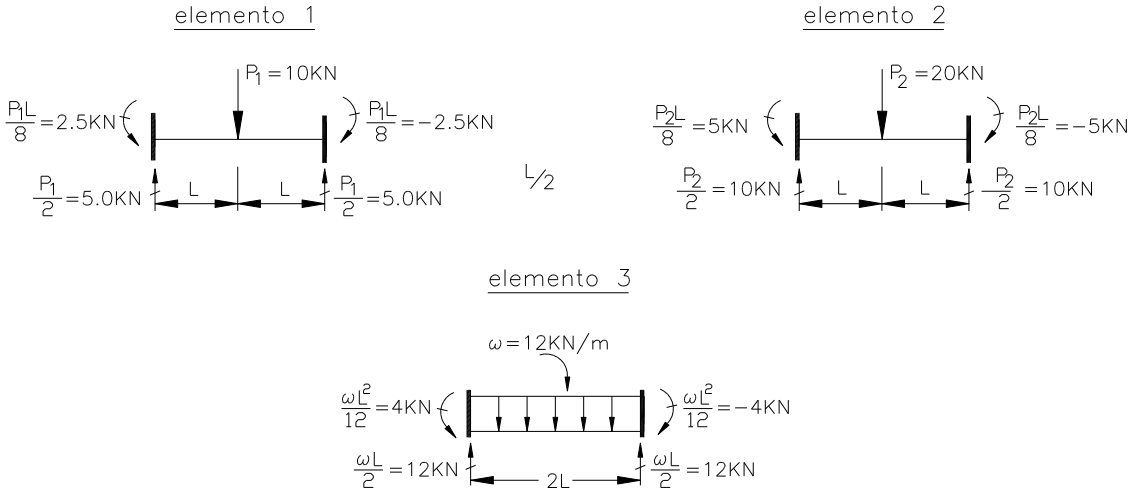


Fig.e2.3.2 Vector de cargas nodales equivalentes.

elemento 1:

$$\{f_1\}^T = 10^3 \{-5.0 \quad -2.5 \quad -5.0 \quad 2.5\} \tag{e1}$$

elemento 2:

$$\{f_2\}^T = 10^3 \{-10.0 \quad -5.0 \quad -10.0 \quad 5.0\} \tag{e2}$$

elemento 3:

$$\{f_3\}^T = 10^3 \{-12.0 \quad -4.0 \quad -12.0 \quad 4.0\} \tag{e3}$$

Luego, el vector de cargas nodales equivalentes, correpondiente a las acciones que se ejercen directamente sobre los elementos de la viga, es igual a:

$$\{F_2\}^T = 10^3 \{-5.0 \quad -2.5 \quad -15.0 \quad -2.5 \quad -22.0 \quad 1.0 \quad -12.0 \quad 4.0\} \tag{f}$$

y finalmente, el vector de cargas nodales equivalentes del sistema es:

$$\{F\}^T = \{F_1\}^T + \{F_2\}^T = 10^3 \{-5.0 \quad -2.5 \quad -35.0 \quad -42.5 \quad -22.0 \quad 1.0 \quad -12.0 \quad 4.0\} \tag{g}$$

Así, el sistema global de ecuaciones de este problema es igual a:

$$10^8\begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 0.40 & -0.30 & 0.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & 0.90 & 0.30 & -0.60 & 0.60 & 0.00 & 0.00 \\ & & & 1.20 & -0.60 & 0.40 & 0.00 & 0.00 \\ & & & & 1.50 & 0.30 & -0.90 & 0.90 \\ & & & & & 2.00 & -0.90 & 0.60 \\ & & & & & & 0.90 & -0.90 \\ & & & & & & & 1.20 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ V_2 \\ \Theta_2 \\ V_3 \\ \Theta_3 \\ V_4 \\ \Theta_4 \end{Bmatrix}=10^3\begin{Bmatrix} -5.0 \\ -2.5 \\ -35.0 \\ -42.5 \\ -22.0 \\ 1.0 \\ -12.0 \\ 4.0 \end{Bmatrix} \quad \text{(h)}$$

e.- Introducción de las condiciones de contorno

El sistema global de ecuaciones, modificado por la introducción de las condiciones de contorno, viene dada por:

$$10^8\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & 1.0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & 0.90 & 0.30 & 0.00 & 0.60 & 0.00 & 0.00 \\ & & & 1.20 & 0.00 & 0.40 & 0.00 & 0.00 \\ & & & & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & & & & 2.00 & 0.00 & 0.00 \\ & & & & & & 1.00 & 0.00 \\ & & & & & & & 1.00 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1 \\ \Theta_1 \\ V_2 \\ \Theta_2 \\ V_3 \\ \Theta_3 \\ V_4 \\ \Theta_4 \end{Bmatrix}=10^3\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -35.0 \\ -42.5 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\{V_1 \quad \Theta_1 \quad V_2 \quad \Theta_2 \quad V_3 \quad \Theta_3 \quad V_4 \quad \Theta_4\}=$$
$$\{0.0 \quad 0.0 \quad -0.4115\,\text{mm} \quad -0.3151\,\text{rad} \quad 0.0 \quad 0.1915\,\text{rad} \quad 0.0 \quad 0.0\}$$

f.- Cálculo de las acciones en los nodos de los elementos

Recordando, de nuevo, que los sistemas de referencia local y global coinciden, las acciones en los nodos de los elementos vienen dadas por:

elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_1 \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 \\ 0.30 & 0.40 & -0.30 & 0.20 \\ -0.30 & -0.30 & 0.30 & -0.30 \\ 0.30 & 0.20 & -0.30 & 0.40 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.4115 \\ -0.3151 \end{Bmatrix}=10^3\begin{Bmatrix} 2{,}8915 \\ 6.0426 \\ -2.8915 \\ -0.25969 \end{Bmatrix}$$

Puesto que el elemento está cargado, a estas acciones en los nodos, habrá que sumarle las acciones en los nodos del elemento de la estructura fija (Fig.e3.2); es decir, el vector final de las acciones que se generan en los nodos en este elemento es:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_1 \end{Bmatrix} = 10^3 \left[\begin{Bmatrix} 2{,}8915 \\ 6.0426 \\ -2.8915 \\ -0.25969 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.0 \\ 2.5 \\ 5.0 \\ -2.5 \end{Bmatrix} \right] = 10^3 \begin{Bmatrix} 7.8915 \\ 8.45426 \\ 2.1085 \\ -2.7597 \end{Bmatrix}$$

elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_1 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.60 & 0.60 & -0.60 & 0.60 \\ 0.60 & 0.80 & -0.30 & 0.40 \\ -0.60 & -0.60 & 0.60 & -0.60 \\ 0.60 & 0.40 & -0.60 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.4115 \\ -0.3151 \\ 0.0 \\ 0.1915 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} -32.109 \\ -42.240 \\ 32.109 \\ 21.977 \end{Bmatrix}$$

Como este elemento también está cargado, el vector de acciones nodales final es:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_1 \end{Bmatrix} = 10^3 \left[\begin{Bmatrix} -32.109 \\ -42.240 \\ 32.109 \\ 21.977 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10.0 \\ 5.0 \\ 10.0 \\ -5.0 \end{Bmatrix} \right] = 10^3 \begin{Bmatrix} -22.109 \\ -37.240 \\ 42.109 \\ -26.977 \end{Bmatrix}$$

elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.90 & 0.90 & -0.90 & 0.90 \\ 0.90 & 1.20 & -0.90 & 0.60 \\ -0.90 & -0.90 & 0.90 & -0.90 \\ 0.90 & 0.60 & -0.90 & 1.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.1915 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 17.233 \\ 22.977 \\ -17.233 \\ 11.488 \end{Bmatrix}$$

y como este elemento también está cargado:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_1 \end{Bmatrix} = 10^3 \left[\begin{Bmatrix} 17.232 \\ 22.977 \\ -17.233 \\ 11.488 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12.0 \\ 4.0 \\ 12.0 \\ -4.0 \end{Bmatrix} \right] = 10^3 \begin{Bmatrix} 29.233 \\ 26.977 \\ -5.233 \\ 7.488 \end{Bmatrix}$$

g.- Cálculo de las reacciones

Las reacciones se pueden obtener mediante el equilibrio nodal de las acciones en los soportes de la estructura. En este caso, el vector de las reacciones viene dado por:

Nodo 1: $10^3\{7.8915 \quad 8.5426\}$; Nodo 2: $10^3\{71.341 \quad 0.0\}$; Nodo 3: $10^3\{-5.2326 \quad 7.4884\}$

2.9.4.- Ejemplo 2.4. Placa en estado plano de tensiones

La placa delgada mostrada en la Fig.e2.4.1a es de acero (E= 200GPa, $\nu = 0.30$) y tiene un espesor $t = 0.01\text{m}$. La carga aplicada actúa perpendicular al lado CD. Se desea discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos y determinar los desplazamientos nodales y las deformaciones y esfuerzos generados en los elementos.

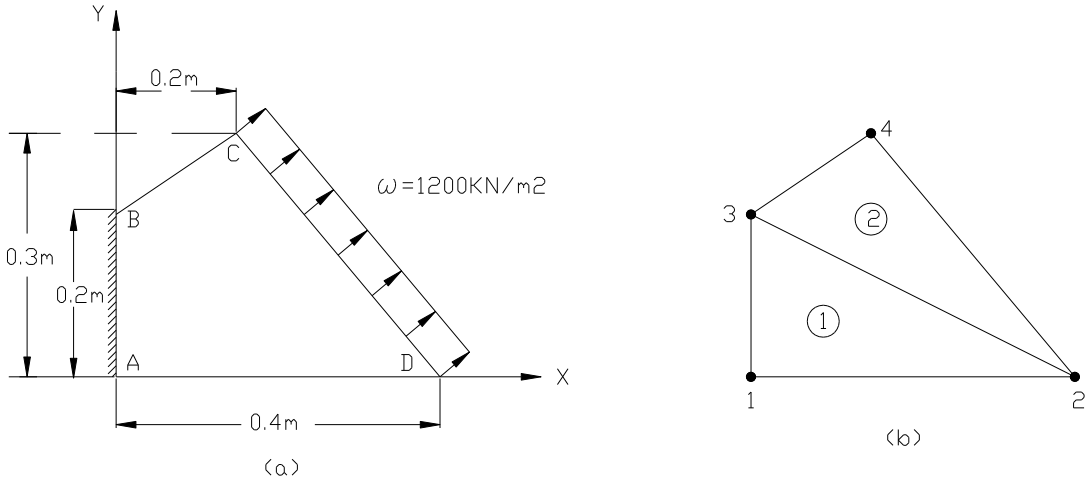


Fig.e2.4.1 Placa en estado plano de tensiones. (a) Dominio del problema; (b) Discretización del dominio.

a.- Discretización del dominio

Para la solución del problema se propone la discretización del domino de la placa mostrada en la Fig.e2.4.1b. La topología del sistema es la siguiente:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
	3	3
2	1	3
	2	2
	3	4

b.- Construcción de las matrices de rigidez

Puesto que el espesor de la placa es muy pequeño, este es un típico problema de estado plano de tensiones. Luego, las matrices de rigidez de los elementos se determinan a través de la expresión dada en la Tabla2.2. Así, la matriz de rigidez del elemento 1 viene dada por:

$$[k]^{(1)} = 10^9 \begin{bmatrix} 1.319 & 0.7143 & -0.5495 & -0.3846 & -0.7692 & -0.3297 \\ & 2.390 & -0.3297 & -0.1923 & -0.3846 & -2.198 \\ & & 0.5495 & 0.0 & 0.0 & 0.3297 \\ & & & 0.1923 & 0.3846 & 0.0 \\ & \text{Simétrica} & & & 0.7692 & 0.0 \\ & & & & & 2.198 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez del elemento 2 es:

$$[k]^{(2)} = 10^9 \begin{bmatrix} 1.429 & 0.5357 & -0.2198 & 0.1511 & -0.1209 & -0.6868 \\ & 0.9821 & 0.2060 & 0.4052 & -0.7418 & -1.387 \\ & & 0.3297 & -0.1786 & -0.1099 & -0.02747 \\ & & & 0.5975 & 0.02747 & -1.003 \\ & \text{Simétrica} & & & 1.319 & 0.7143 \\ & & & & & 2.390 \end{bmatrix}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales

El lector habrá notado que la deducción de los coeficientes de la matriz de rigidez, tanto en el caso de estado plano de tensiones como en el caso de estado plano de deformaciones, en la sección 2.4.3, se realizó en base al sistema global de referencia, y por lo tanto el ensamblaje de las matrices locales de rigidez se efectúa directamente de acuerdo con la topología del sistema adoptada. Así, en este caso la matriz de rigidez global viene dada por:

$$[K] = 10^9 \begin{bmatrix} 1.319 & 0.7143 & -0.5495 & -0.3846 & -0.7692 & -0.3297 & 0.0 & 0. \\ & 2.390 & -0.3297 & -0.1923 & -0.3846 & -0.2198 & 0.0 & 0.0 \\ & & 0.8792 & -0.1786 & -0.2198 & 0.5357 & -0.1099 & -0.02747 \\ & & & 0.7898 & 0.5357 & 0.4052 & 0.02747 & -1.003 \\ & & & & 2.198 & 0.5357 & -1.209 & -0.6868 \\ & \text{Simétrica} & & & & 0.3180 & -0.7418 & -1.387 \\ & & & & & & 1.319 & 0.7143 \\ & & & & & & & 2.390 \end{bmatrix}$$

d.- Vector de cargas nodales equivalentes

El vector de cargas nodales equivalentes, correspondiente a la carga distribuida sobre el lado CD se obtiene, como ya se estableció previamente, distribuyendo sus componentes en *x* y *y*, igualmente entre los nodos 2 y 4; tal como se muestra en la Fig.e2.4.2; es decir:

$$f = \omega \times L_{CD} \times t$$

donde:

$L_{CD} = \sqrt{(0.4-0.2)^2 + (0.3-0.0)^2} = 0.36055\,\text{m}$ es la longitud del lado CD. Luego:

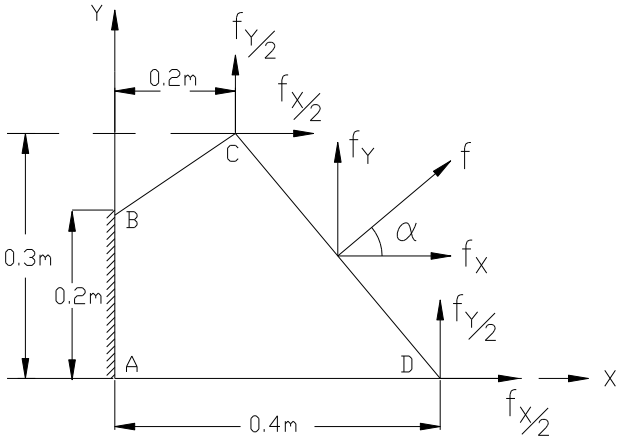


Fig.e2.4.2 Componentes del vector de cargas nodales equivalentes.

$f = 1200 \times 0.36055 \times 0.01 = 4236.60\,\text{N}$, y por lo tanto:

Luego,

$$f_X = f \times \cos\alpha = 4326.60 \times \frac{0.3}{0.36055} = 3600\,\text{N}$$

$$f_Y = f \times \text{sen}\,\alpha = 4326.60 \times \frac{0.2}{0.36055} = 2400\,\text{N}$$

y por lo tanto el vector de cargas nodales equivalentes para este caso es:

$$\{f\} = \{0.0 \quad 0.0 \quad 1800 \quad 1200 \quad 1800 \quad 1200 \quad 0.0 \quad 0.0\}^T$$

Entonces, el sistema global de ecuaciones correspondiente a este problema viene dado por:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 1.319 & 0.7143 & -0.5495 & -0.3846 & -0.7692 & -0.3297 & 0.0 & 0. \\ & 2.390 & -0.3297 & -0.1923 & -0.3846 & -0.2198 & 0.0 & 0.0 \\ & & 0.8792 & -0.1786 & -0.2198 & 0.5357 & -0.1099 & -0.02747 \\ & & & 0.7898 & 0.5357 & 0.4052 & 0.02747 & -1.003 \\ & & & & 2.198 & 0.5357 & -1.209 & -0.6868 \\ & \text{Simétrica} & & & & 0.3180 & -0.7418 & -1.387 \\ & & & & & & 1.319 & 0.7143 \\ & & & & & & & 2.390 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1800 \\ 1200 \\ 1800 \\ 1200 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

e.- Introducción de las condiciones de contorno

Los desplazamientos de los nodos 1 y 3 son iguales a cero y por lo tanto, la introducción de las condiciones de contorno en el sistema anterior conduce a:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = 10^9 \begin{bmatrix} 1.319 & 0.7143 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0. \\ & 2.390 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & \text{Simétrica} & & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & & & 1.319 & 0.7143 \\ & & & & & & & 2.390 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1800 \\ 1200 \\ 1800 \\ 1200 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\} =$$
$$10^{-5}\{0.0 \quad 0.0 \quad 0.34775 \quad 0.67321 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad -0.036861 \quad 0.34766\}^T$$

f.- Cálculo de las deformaciones en los elementos

Puesto que las funciones de aproximación del elemento de tres nodos son lineales en *x* y *y*, la deformación en cualquier punto del mismo es constante y se determina mediante la ec.2.49; es decir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Luego, para el elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.0 & 2.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 \\ -5.0 & -2.5 & 0.0 & 2.5 & 5.0 & 0.0 \end{bmatrix} 10^{-5} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.34775 \\ 0.67321 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = 10^{-5} \begin{Bmatrix} 0.8694 \\ 0.0 \\ 1.683 \end{Bmatrix}$$

y para el elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.75 & 0.0 & 1.25 & 0.0 & 2.5 & 0.0 \\ 0.0 & -2.5 & 0.0 & -2.5 & 0.0 & 5.0 \\ -2.5 & -3.75 & -2.5 & 1.25 & 5.0 & 2.5 \end{bmatrix} 10^{-5} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.34775 \\ 0.67321 \\ -0.036861 \\ 00.34766 \end{Bmatrix} = 10^{-5} \begin{Bmatrix} 0.3425 \\ 0.05528 \\ 0.6570 \end{Bmatrix}$$

g.- Cálculo de los esfuerzos en los elementos

El cálculo de los esfuerzos en los elementos se realiza, mediante la ec.2.50; es decir:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

Luego, para el elemento 1 se tiene:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\frac{200\times10^9}{1-0.3^2}\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0\\ 0.3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.35\end{bmatrix}10^{-5}\begin{Bmatrix}0.8694\\ 0.0\\ 1.683\end{Bmatrix}=10^6\begin{Bmatrix}1.911\\ 0.5732\\ 1.295\end{Bmatrix}$$

y, finalmente para el el elemento 2:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}\frac{200\times10^9}{1-0.3^2}\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0\\ 0.3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0.35\end{bmatrix}10^{-5}\begin{Bmatrix}0.3425\\ 0.05528\\ 0.6570\end{Bmatrix}=10^6\begin{Bmatrix}0.7893\\ 0.3473\\ 0.5054\end{Bmatrix}$$

2.10.- El método directo en problemas no estructurales

Mediante el método directo también es posible resolver problemas de naturaleza distinta a la estructural, tales como los problemas de redes, tanto de flujo de fluidos en redes de tuberías (Fig.2.26a), como de flujo de corriente en redes eléctricas (Fig.2.26b).

Como se verá a continuación, en cada uno de estos problemas, la matriz de "rigidez" local tiene la misma forma que la del elemento axial anteriormente deducida aunque, lógicamente, en cada caso dicha matriz tiene un significado físico diferente.

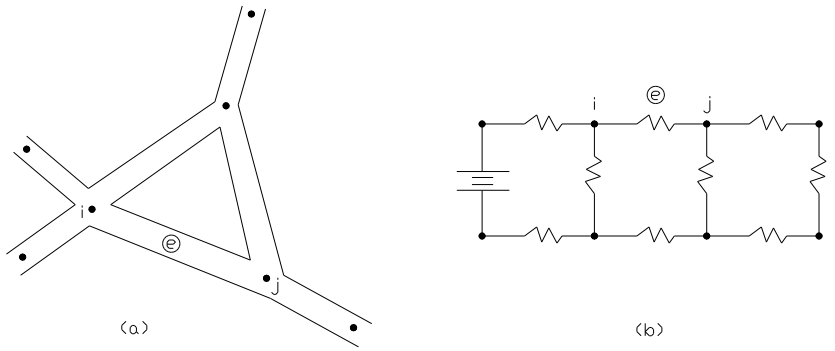


Fig.2.26 Representación esquemática de redes. (a) Red de tuberías; (b) Red eléctrica.

2.10.1.- Flujo en redes de tuberías

En la Fig.2.27a se muestra el dominio de un problema correspondiente al flujo laminar ($R_e \leq 2000$; R_e: número de Reynolds), completamente desarrollado, de un fluido incompresible, a través de un tubo de diámetro D (constante) y longitud L.

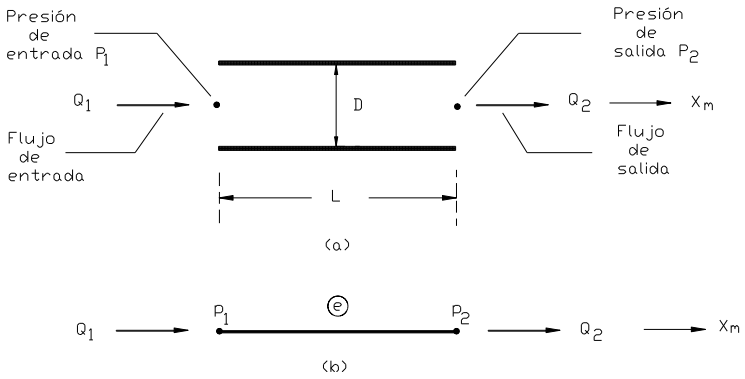


Fig.2.27 Flujo de fluidos en un elemento de una red de tuberías. (a) Representación Esquemática de un elemento; (b) Discretización del dominio.

En la Fig.2.27b se muestra la discretización del tubo mediante un elemento unidimensional de dos nodos por elemento. De la teoría básica de la mecánica de los fluidos se sabe que:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128 \mu L}\left(P_1 - P_2\right) \tag{2.100}$$

donde Q es el flujo del fluido, μ es su viscosidad y P_1 y P_2 representan las presiones en los puntos nodales 1 y 2, respectivamente.

Sea $Q^{(e)}$ el flujo en el elemento genérico (e). Luego, asumiendo que el flujo de entrada al nodo 1 es positivo, se tiene:

$$Q_1 = \frac{\pi D^4}{128 \mu L}\left(P_1 - P_2\right) \tag{2.101}$$

y, por lo tanto, en el nodo 2, el flujo será:

$$Q_2 = \frac{\pi D^4}{128 \mu L}\left(P_2 - P_1\right) \tag{2.102}$$

en notación matricial, las ecs.(2.101) y (2.102) se escriben:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \frac{\pi D^4}{128 \mu L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \tag{2.103a}$$

o, en forma compacta:

$$\{Q\} = [\kappa]\{P\} \tag{2.103b}$$

donde:
$\{Q\}$: es el vector de flujos nodales, $[\kappa]$: es la matriz de "rigidez" y $\{P\}$: es el vector de presiones nodales.
Nótese que el sistema de la ec.(2.103a) es similar al sistema dado por la ec.(2.6), donde:

$$\kappa^{(e)} = \left(\frac{\pi D^4}{128 \mu L} \right)^{(e)} \tag{2.104}$$

2.10.1.1.- Ejemplo 2.5. Red de tuberías

Sea la red de tres tubos mostrada en la Fig.e2.5.1a. Las presiones en los tres nodos exteriores son $P_1 = 140\,\text{KPa}$, $P_3 = 130\,\text{KPa}$ y $P_4 = 110\,\text{KPa}$. La viscosidad del fluido es $\mu = 0.01\ \text{Pa} \cdot \text{sg}$. Se trata de determinar la presión en el nodo 2 y el flujo en los tubos.

a.- Discretización del dominio

La discretización de la red se muestra en la Fig.e2.5.1b y la topología asociada a la misma es:

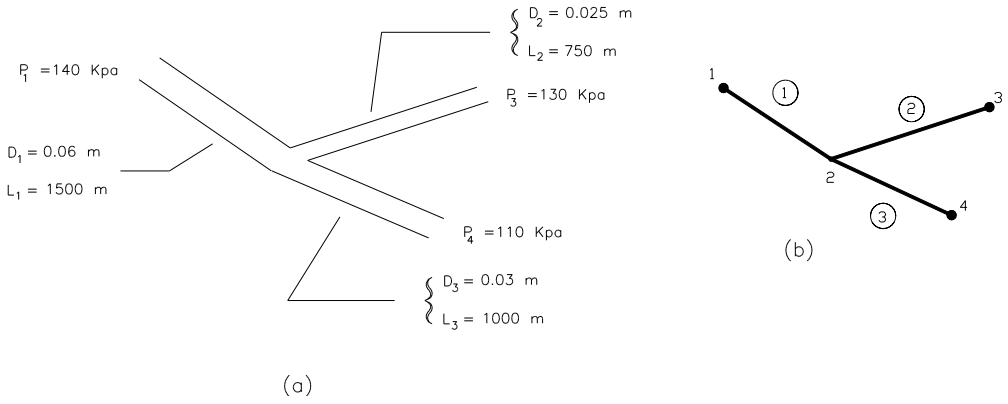


Fig.e2.5.1 Red de tres tubos. (a) Definición de las variables de la red; (b) Discretización del dominio.

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	2
	2	4

b.- Construcción de las matrices locales de "rigidez"

Para el elemento 1 se tiene:

$$\left(\frac{\pi D^4}{128\,\mu L}\right)^{(1)} = \frac{\pi(0.06)^4}{128\times 0.01\times 1500} = 0.212\times 10^{-7}\ \frac{m^5}{N\cdot sg}$$

para el elemento 2:

$$\left(\frac{\pi D^4}{128\,\mu L}\right)^{(2)} = \frac{\pi(0.025)^4}{128\times 0.01\times 750} = 0.128\times 10^{-8}\ \frac{m^5}{N\cdot sg}$$

y para el elemento 3:

$$\left(\frac{\pi D^4}{128\,\mu L}\right)^{(3)} = \frac{\pi(0.03)^4}{128\times 0.01\times 1000} = 0.199\times 10^{-8}\ \frac{m^5}{N\cdot sg}$$

Luego, las matrices de "rigidez" para los tres elementos vienen dadas por:

elemento 1:

$$0.212\times 10^{-7}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

elemento 2:

$$0.128\times 10^{-8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \end{Bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

elemento 3:

$$0.199\times 10^{-8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(3)} \\ Q_2^{(3)} \end{Bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales

De acuerdo con la topología seleccionada, el sistema global de ecuaciones es igual a:

$$10^{-7}\begin{bmatrix} 0.212 & -0.212 & 0.00 & 0.00 \\ -0.212 & (0.212+0.0128+0.0199) & -0.0128 & -0.0199 \\ 0.00 & -0.0128 & 0.0128 & 0.00 \\ 0.00 & -0.0199 & 0.00 & 0.0199 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{(d)}$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno

Introduciendo las condiciones de contorno en el sistema (d) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2447\times 10^{-7} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 140.0\times 10^3 \\ 0.0+(0.212\times 140+0.0128\times 130+0.0199\times 110)\times 10^{-4} \\ 130.0\times 10^3 \\ 110.0\times 10^3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2447\times10^{-7} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 140.0\times10^{3} \\ 33.533\times10^{-4} \\ 130.0\times10^{3} \\ 110.0\times10^{3} \end{Bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

Luego:

$$P_2 = 137.04\,\text{KPa}$$

e.- Cálculo del flujo en los nodos de los elementos

El flujo en cada tubo se determina a partir de la ec:(2.103a) evaluada en cada elemento. Luego, para el elemento 1:

$$0.212\times10^{-7}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 140.0\times10^{3} \\ 137.04\times10^{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$Q^{(1)}{}_1 = 62.752\times10^{-6}\,\frac{m^3}{sg} \qquad ; \qquad Q^{(1)}{}_2 = -62.752\times10^{-6}\,\frac{m^3}{sg}$$

elemento 2:

$$0.128\times10^{-8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 137.04\times10^{3} \\ 130.0\times10^{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(2)} = 9.011\times10^{-6}\,\frac{m^3}{sg} \qquad ; \qquad Q_2^{(2)} = -9.011\times10^{-6}\,\frac{m^3}{sg}$$

elemento 3:

$$0.199\times10^{-8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 137.04\times10^{3} \\ 110.0\times10^{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(3)} \\ Q_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(3)} = 5.3.809\times10^{-6}\,\frac{m^3}{sg} \qquad ; \qquad Q_2^{(3)} = -5.3.809\times10^{-6}\,\frac{m^3}{sg}$$

En la Fig.e2.5.2 se indican los sentidos de los flujos calculados, y se puede observar que, obviamente, se verifica que: $Q^{(1)} = Q^{(2)} + Q^{(3)}$.

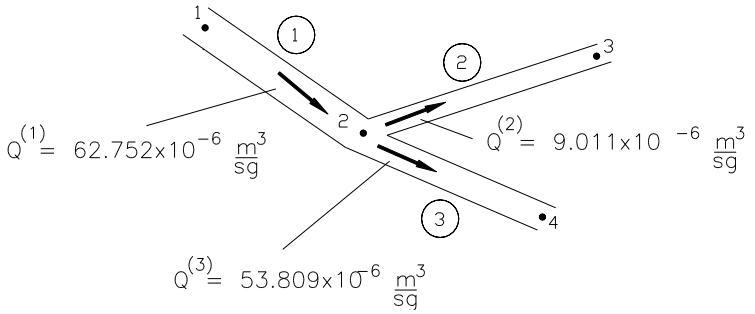


Fig.e2.5.2 Sentidos de los flujos en los elementos de la red.

2.10.2.- Flujo en redes eléctricas

La idea de definir una trayectoria de flujo como un elemento finito de una red de flujo de un fluido, puede también aplicarse a redes eléctricas de corriente directa. Así, un elemento conductor de corriente de una red eléctrica, puede verse como un elemento finito, tal como se muestra en la Fig.2.28. Las características físicas de un elemento de este tipo se obtiene mediante la ley de Ohm.

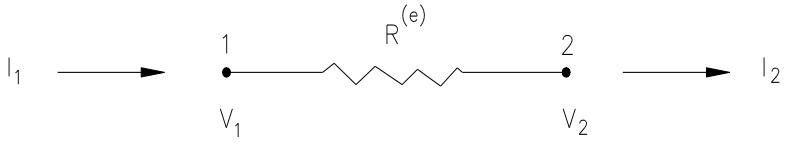


Fig.2.28 Modelo de un elemento finito de una resistencia eléctrica.

Procediendo de forma análoga a la utilizada en el flujo de redes de tuberías, los voltajes V_1 y V_2 desempeñan el mismo rol de las presiones nodales y la corriente I, reemplaza al flujo Q.

De acuerdo con la ley de Ohm, la caída de voltaje, V, a través de la resistencia R, está relacionada con la resistencia y con la corriente I, mediante la fórmula $V = R\,I$. Luego para el elemento de la Fig.2.28, se tendrá:

$$I = \frac{1}{R}\left(V_1 - V_2\right) \tag{2.105}$$

Como en el caso del flujo a través de una tubería, un decremento de voltaje a través de la resistencia, desde un punto 1 al punto 2, produce una corriente con flujo positivo desde el punto 1 hacia el punto 2. Entonces, evaluando la ec.(2.105) en los nodos 1 y 2 se obtiene:

$$I_1 = \frac{1}{R}\left(V_1 - V_2\right) \tag{2.106a}$$

$$I_2 = \frac{1}{R}\left(V_2 - V_1\right) \tag{2.106b}$$

o en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \tag{2.107}$$

De nuevo, nótese la similitud entre este sistema y el dado por la ec.(2.6), donde ahora:

$$\kappa^{(e)} = \left(\frac{1}{R}\right)^{(e)} \tag{2.108}$$

2.10.2.1- Ejemplo 2.6. Red eléctrica

Considérese la red eléctrica mostrada en la Fig.e2.6.1a. Supóngase que en el nodo 1 hay un potencial de 20 voltios, y que el nodo 2 está conectado a tierra (i.e., 0 voltios). Se desea

determinar los voltajes en todos los puntos nodales y las intensidades de corriente a través de todas las resistencias.

a.- Discretización del dominio

La discretización del dominio de la red se puede observar en la Fig.e2.6.1b.

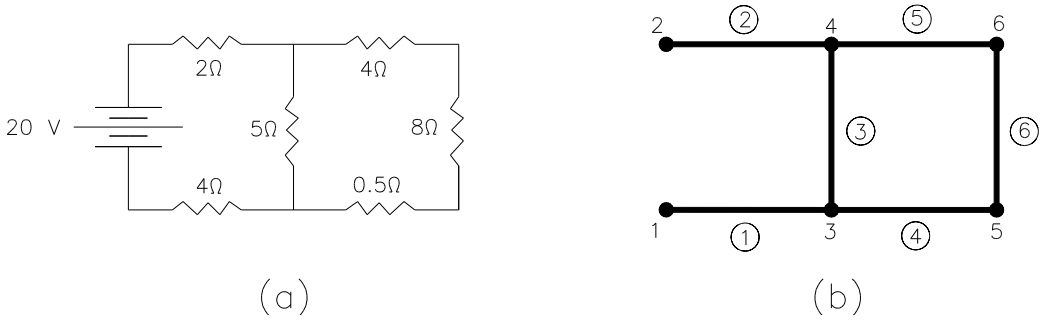


Fig.e2.6.1 Definición de las variables de la red eléctrica y discretización del dominio.

La topología del sistema es la siguiente:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	3
2	1	2
	2	4
3	1	3
	2	4
4	1	3
	2	5
5	1	4

b.- Construcción de las matrices locales de "rigidez"

Evaluando el sistema de ecuaciones (2.107) en cada elemento de la red, se obtiene:

elemento 1

$$0.25\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

elemento 2

$$0.50\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(2)} \\ V_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

elemento 3

$$0.20\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(3)} \\ V_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(3)} \\ I_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

elemento 4

$$2.00\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(4)} \\ V_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(4)} \\ I_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

elemento 5

$$0.25\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(5)} \\ V_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(5)} \\ I_2^{(5)} \end{Bmatrix}$$

elemento 6

$$0.125\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1^{(6)} \\ V_2^{(6)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(6)} \\ I_2^{(6)} \end{Bmatrix}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales

De acuerdo con la topología seleccionada, el sistema global del problema propuesto viene dada por:

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 & -0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 0.00 & -0.50 & 0.00 & 0.00 \\ -0.25 & 0.00 & (0.25+0.20+2.00) & -0.20 & -2.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.50 & -0.20 & (0.50+0.20+0.25) & 0.00 & -0.25 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 & (2.00+0.125) & -0.125 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.25 & -0.125 & (0.25+0.125) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{Bmatrix}$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno

Después de introducir las condiciones de contorno, el sistema de ecuaciones anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.45 & -0.20 & -2.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.20 & 0.950 & 0.00 & -0.25 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0 & 2.125 & -0.125 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.25 & -0.125 & 0.375 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20.00 \\ 0.00 \\ 0.0+0.25\times 20.0-0.0\times 0.0 \\ 0.0-0.0\times 20.0+0.5\times 0.0 \\ 0.0-0.0\times 20.0-0\times 0.0 \\ 0.0-0.0\times 20.0-0\times 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20.0 \\ 0.0 \\ 5.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$V_1 = 20.0 \text{ v}\ ,\ V_2 = 0.0 \text{ v}\ ,\ V_3 = 11.642 \text{ v}\ ,\ V_4 = 4.179 \text{ v}\ ,\ V_5 = 11.343 \text{ v}\ ,\ V_6 = 6.567 \text{ v}.$$

e.- Cálculo de las intensidades de corriente en los nodos de los elementos

Las corrientes se obtienen evaluando, a nivel de cada elemento, la ec.(2.107); es decir:

elemento 1:

$$0.25\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 20.0 \\ 11.642 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$I_1^{(1)} = 2.089 \text{ amps.} \quad ; \quad I_2^{(1)} = -2.089 \text{ amps.}$$

elemento 2:

$$0.50\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.00 \\ 4.179 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$I_1^{(2)} = -2.089 \text{ amps.} \quad ; \quad I_2^{(2)} = 2.089 \text{ amps.}$$

elemento 3:

$$0.20\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 11.642 \\ 4.179 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(3)} \\ I_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$I_1^{(3)} = 1.493 \text{ amps.} \quad ; \quad I_2^{(3)} = -1.493 \text{ amps.}$$

elemento 4:

$$2.00\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 11.642 \\ 11.343 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(4)} \\ I_2^{(4)} \end{Bmatrix}$$

$$I_1^{(4)} = 0.598 \text{ amps.} \quad ; \quad I_2^{(4)} = -0.598 \text{ amps.}$$

elemento 5:

$$0.25\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 4.179 \\ 6.567 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(5)} \\ I_2^{(5)} \end{Bmatrix}$$

$$I_1^{(5)} = -0.597 \text{ amps.} \quad ; \quad I_2^{(5)} = 0.597 \text{ amps.}$$

y, por último:

elemento 6:

$$0.125\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 11.343 \\ 6.567 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_1^{(6)} \\ I_2^{(6)} \end{Bmatrix}$$

$$I_1^{(6)} = 0.597 \text{ amps.} \quad ; \quad I_2^{(6)} = -0.597 \text{ amps.}$$

En la Fig.e2.6.2 se muestran los sentidos de las intensidades de corriente calculadas.

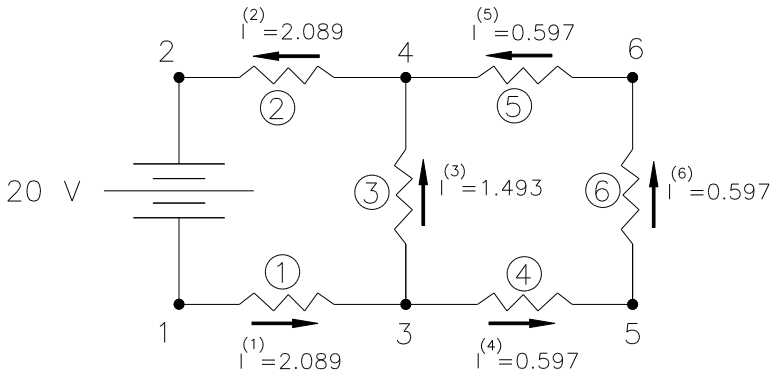


Fig.e2.6.2 Sentidos de las intensidades de corriente en los elementos de la red eléctrica.

2.10.3.- Conducción de calor unidimensional

Considérese la barra mostrada en la Fig.2.29, la cual se supone que es térmicamente axial. El problema consiste en determinar la relación entre las temperaturas T_1 y T_2 y el flujo de calor Q_1 y Q_2 en los puntos nodales.

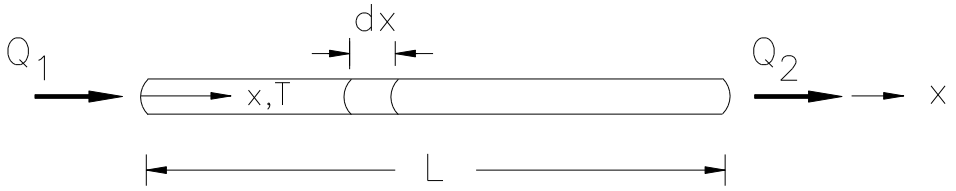


Fig.2.29 Conducción de calor en un elemento unidimensional.

En este caso, la relación constitutiva es la conocida ley de conducción de calor de Fourier:

$$q_x = -k_x \frac{dT}{dx} \tag{2.109}$$

donde q_x es el flujo de calor por conducción por unidad de área $\left(W/mm^2\right)$ y k_x es el coeficiente de conducción de calor $\left(W/mm^{2o}C\right)$. Algunas veces, $k_x = k_x(x)$.

La transferencia total de calor conductiva en la dirección axial viene dada por:

$$Q_x = -k_x A_x \frac{dT}{dx} \tag{2.110}$$

donde $Q_x = q_x A_x$ y A_x es el área de la sección transversal perpendicular a la dirección del flujo de calor $\left(mm^2\right)$.

Puesto que la temperatura varía linealmente a lo largo de la dirección axial, y consistente con el desarrollo previo del elemento axial, la distribución de temperaturas en este elemento viene dada por:

$$T = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{2.111}$$

luego,

$$\frac{dT}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{2.112}$$

Sustituyendo la ec.(2.112) en la ec.(2.110), se obtiene:

$$Q_x = -\frac{k_x A_x}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{2.113}$$

Evaluando esta expresión en los nodos 1 y 2 del elemento y notando que Q_2 representa el calor que sale del elemento $\left(\text{i.e.}, Q_2 = -Q_1\right)$, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \frac{k_x A_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{2.114}$$

De nuevo, nótese que este sistema es similar al sistema dado por la ec.(2.6), donde ahora:

$$\kappa^{(e)} = \left(\frac{k_x A_x}{L}\right)^{(e)} \tag{2.115}$$

2.10.3.1.- Ejemplo 2.7. Flujo de calor unidimensional

Considérese una placa de longitud L en la dirección del flujo de calor (dirección *x*). Se supone que las dimensiones de la placa, tanto en la dirección *y*, como en la dirección *z*, son muy grandes comparadas con la dirección *x*. La Fig.e2.7.1a ilustra la geometría del problema.

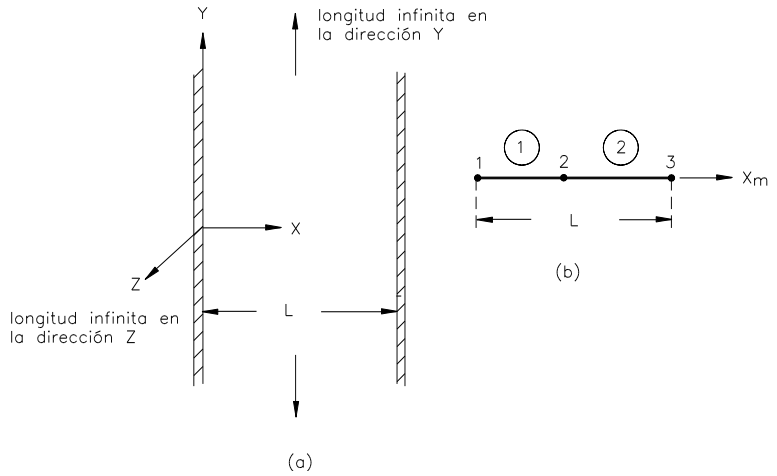


Fig.e2.7.1 Flujo de calor en una placa infinita. (a) Dominio del problema;(b) Discretización del dominio con dos elementos unidimensionales lineales.

Sea la longitud de la placa en la dirección del flujo de calor L = 50 mm, el coeficiente de conducción de calor $k_x = 0.25\ \mathrm{W/mm^2\,^oC}, A_x = dy \cdot dz = 1\ \mathrm{mm^2}$. La temperatura del lado izquierdo de la placa (x = 0), se mantiene a una temperatura de $T_o = 100\,^o\mathrm{C}$, mientras que en el lado derecho de la misma se considerarán los siguientes casos:

a.- $T_L = 25\,^o\mathrm{C}$ (Temperatura prescrita)

b.- $Q_{xL} = 0\,\mathrm{W}$ (Condición de contorno de aislamiento)

c.-$Q_{xL} = 0.30\,\mathrm{W}$ (Flujo de calor prescrito).

El objetivo de este problema consiste en determinar la distribución de temperatura para las tres condiciones de contorno especificadas.

a.- Discretización del dominio

La discretización de la placa se muestra en la Fig.e2.7.1b y consta de dos elementos de la misma longitud, de dos nodos por elemento. La topología del sistema es:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de "rigidez"

Con esta discretización se tiene:

$$\left(\frac{k_x A_x}{L}\right)^{(1)} = \left(\frac{k_x A_x}{L}\right)^{(2)} = \frac{0.25 \times 1.0}{25} = 0.01\ \mathrm{W/^oC}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales

Puesto que los elementos tienen las mismas propiedades geométricas y térmicas, y los sistemas de referencia locales y global coinciden, la matriz global del sistema es, directamente:

$$0.01\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno

La solución al problema propuesto se obtiene introduciendo las condiciones de contorno correspondientes a cada caso. Así, se tiene:

d1.- Caso 1: Temperatura prescrita

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.02 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100.0 \\ 0.0 + 0.01 \times 100.0 + 0.01 \times 25.0 \\ 25.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100.0 \\ 1.25 \\ 25.0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

es decir,

$$T_2 = 62.50\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Luego el vector de temperaturas nodales "aproximado" es: $T_1 = 100.0\,^{\circ}\mathrm{C}$, $T_2 = 62.50\,^{\circ}\mathrm{C}$ y $T_3 = 25.0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Es fácil verificar que la solución exacta de este problema viene dada por:

$$T(x) = 100 - 1.5\,x \qquad \text{(c)}$$

Como puede notarse, la solución aproximada obtenida a través del **mef**, coincide con la solución exacta.

e1.- Cálculo del flujo de calor en los nodos de los elementos

El flujo de calor en los nodos de los elementos se determina mediante la ec.(2.110). De este modo se tiene que:

elemento 1:

$$0.01 \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 100.0 \\ 62.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(1)} = 0.375\,\mathrm{W} \qquad ; \qquad Q_2^{(1)} = -0.375\,\mathrm{W}$$

elemento 2:

$$0.01 \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 62.5 \\ 25.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(2)} = 0.375\,\mathrm{W} \qquad ; \qquad Q_2^{(2)} = -0.375\,\mathrm{W}$$

d2.- Caso 2: Condición de contorno de aislamiento

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.02 & -0.01 \\ 0.0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100.0 \\ 0.0 + 0.01 \times 100.0 \\ 0.0 - 0.0 \times 100.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 100.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(d)}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $T_2 = T_3 = 100\,^{\circ}\mathrm{C}$. De nuevo, la solución aproximada obtenida mediante el **mef** coincide con la exacta la cual viene dada por: $T(x) = 100.0$.

e2.- Cálculo del flujo de calor en los nodos de los elementos

elemento 1:

$$0.01\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 100.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(1)} = 0.0\,\mathrm{W} \quad ; \qquad Q_2^{(1)} = 0.0\,\mathrm{W}$$

elemento 2:

$$0.01\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 100.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(2)} = 0.0\,\mathrm{W} \quad ; \qquad Q_2^{(2)} = 0.0\,\mathrm{W}$$

d3.- Caso 2: Flujo de calor prescrito

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.02 & -0.01 \\ 0.0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 100.0 \\ 0+0.01\times 100.0 \\ -0.3-0.0\times 100.0 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 100.0 \\ 1.0 \\ -0.3 \end{Bmatrix} \tag{e}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $T_1 = 100.0, T_2 = 70.0\,^{\circ}\mathrm{C}$ y $T_3 = 40.0\,^{\circ}\mathrm{C}$, la cual coincide con la solución exacta:

$$T(x) = 100 - 1.2\,x \tag{f}$$

e3.- Cálculo del flujo de calor en los nodos de los elementos

elemento 1:

$$0.01\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 100.0 \\ 70.0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(1)} = 0.30\,\mathrm{W} \; ; \qquad Q_2^{(1)} = -0.30\,\mathrm{W}$$

elemento 2:

$$0.01\begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 70.0 \\ 40.0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1^{(2)} \\ Q_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$Q_1^{(2)} = 0.30\,\mathrm{W} \; ; \qquad Q_2^{(2)} = -0.30\,\mathrm{W}$$

Es importante destacar que los casos b y c representan, en realidad, la misma situación: flujo de calor prescrito, pudiendo verse el primero como una particularización del segundo.

Por último, es importante destacar que en esta serie de ejemplos, las condiciones de contorno se introdujeron del mismo modo como se hace a través de un programa computacional; es decir:

a.- Se construye la matriz global, ensamblando las matrices locales de todos los elementos.

b.- Se anulan las filas y las columnas de la matriz global asociadas a las variables prescritas y se coloca el valor 1.0 en la diagonal.

c.- El vector término independiente se construye del siguiente modo:

c.1.- Al vector ya existente, se le suman las columnas de la matriz global asociadas a las variables prescritas multiplicadas por el valor de las mismas pero con signo cambiado.

c.2.- En la posición asociada a la variable prescrita se coloca el valor de la misma.

III.- ELEMENTOS Y FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

3.1.- Introducción

En el **mef**, una vez que se ha discretizado el dominio de un problema dado, el campo de la(s) variable(s), (y posiblemente el de sus derivadas), involucradas en el mismo, se aproximan mediante funciones de interpolación, expresadas en términos de los valores nodales de la variable dependiente y, si ese es el caso, el de sus derivadas.

Usualmente, se requiere que las funciones de interpolación sean *compatibles* y *completivas*. El primer requerimiento asegura que la aproximación *seccionalmente continua* de la variable dependiente, sea continua; es decir, en los contornos inter-elementos, dicha variable debe ser continua. Los elementos cuyas funciones de interpolación satisfacen este requerimiento se denominan "compatibles" o "elementos conformes". Para satisfacer el segundo requerimiento, las funciones de interpolación deben seleccionarse de tal modo que si en el problema en estudio, la variable dependiente es una constante, ésta debe ser también, constante en la solución vía el **mef**. Algunos problemas en mecánica de los sólidos pueden necesitar que en la solución a través del **mef**, aparezcan desplazamientos de cuerpo rígido (desplazamiento constante en todo el cuerpo), y un estado de deformación constante (primera derivada del desplazamiento constante sobre el cuerpo). La condición completiva es necesaria para asegurar que la solución aproximada vía el **mef** converja a la solución exacta, cuando el número de elementos presentes en la discretización aumenta (refinamiento de la malla). Los elementos que satisfacen este requerimiento se dicen "elementos completos".

3.2.- Elementos unidimensionales

Para la gran mayoría de elementos, es posible construir sus respectivas funciones de interpolación empleando los conceptos básicos de la teoría de interpolación polinomial. En esta sección se presentará los fundamentos de dos funciones de interpolación clásicas: la basada en los polinomios de interpolación de Lagrange, y la basada en los polinomios de interpolación de Hermite.

3.2.1.- Elementos de Lagrange

En la Fig.3.1 se muestra un elemento unidimensional, lineal, de dos nodos por elemento. Sobre este elemento, la aproximación de la variable $\overset{(e)}{u}(x)$ vendrá dada por:

$$\overset{(e)}{u}(x) = \begin{cases} a_1 + a_2 x & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases} \tag{3.1}$$

Sobre el elemento la función de interpolación es lineal; fuera del mismo es igual a cero. La evaluación de $\overset{(e)}{u}(x)$ en los puntos nodales, conduce a:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x_1 \\ u_2 &= a_1 + a_2 x_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde u_1 y u_2 son los valores de la variable $\overset{(e)}{u}(x)$ en los nodos 1 y 2, respectivamente.

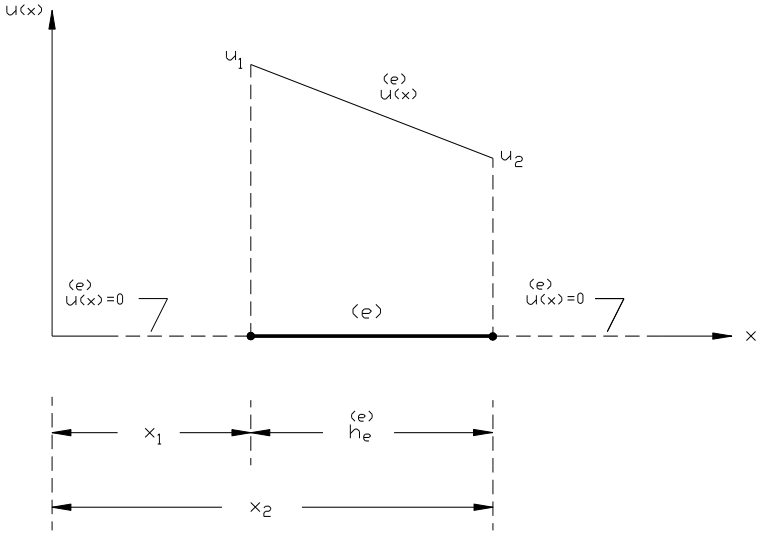


Fig.3.1 Elemento unidimensional lineal y sistema global de referencia.

Resolviendo el sistema (3.2) para a_1 y a_2 , se llega a:

$$a_1 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \tag{3.3}$$

Sustituyendo las ecs.(3.3) en la ec.(3.1), después de agrupar términos, se obtiene:

$$\overset{(e)}{u}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \qquad \forall\ x_1 \le x \le x_2 \tag{3.4}$$

Como se puede apreciar, la interpolación polinomial en el elemento (e), es una función de las coordenadas nodales, la longitud del elemento y de los valores nodales de la variable $\overset{(e)}{u}(x)$. La ec.(3.4) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\overset{(e)}{u}(x) = N_i\, u_i \qquad ; \qquad i = 1,2 \tag{3.5}$$

donde:

$$\overset{(e)}{N}_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad , \quad \overset{(e)}{N}_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \le x \le x_1 \tag{3.6}$$

Nótese que la ec.(3.4) satisface las condiciones de contorno del elemento (e), y las funciones de interpolación $\overset{(e)}{N}_i$ son continuas, linealmente independientes y completas sobre el elemento.

Puesto que las funciones de aproximación se dedujeron a partir de la ec.(3.1), de tal manera que $\overset{(e)}{u}(x)=\overset{(e)}{u}_1$ en el nodo 1, y $\overset{(e)}{u}(x)=\overset{(e)}{u}_2$ en el nodo 2 (i. e., interpola el valor de $\overset{(e)}{u}(x)$ entre $\overset{(e)}{u}_1$ y $\overset{(e)}{u}_2$), dichas funciones reciben el nombre de *funciones de interpolación* de la familia de Lagrange y los elementos finitos asociados se dice que pertenecen a la familia de *elementos finitos de Langrange*. Además de la propiedad de $\overset{(e)}{N}_i=0$ fuera del elemento, estas funciones tienen las siguientes propiedades:

$$\overset{(e)}{N}_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad i=j\\ 0 & \text{si} \quad i\neq j\end{cases} \tag{3.7a}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\overset{(e)}{N}_i(x)=1 \tag{3.7.b}$$

La primera propiedad es el resultado de la interpolación y puede apreciarse, gráficamente, en la Fig.3.2.

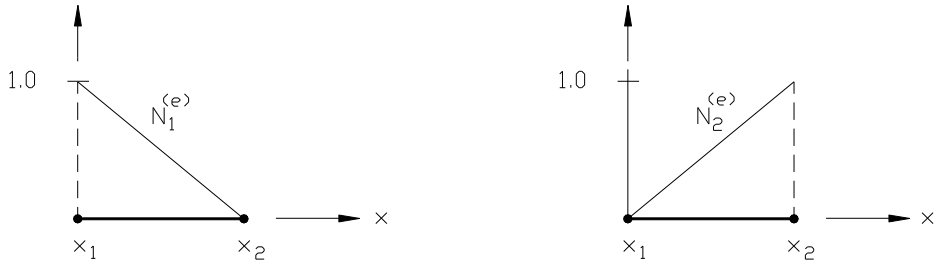


Fig.3.2 Funciones de interpolación de un elemento unidimensional lineal.

La segunda es el resultado de incluir un término constante en la aproximación. En otras palabras, la primera propiedad implica que la ec.(3.4) satisface las condiciones $\overset{(e)}{u}(x_1)=\overset{(e)}{u}_1$ y $\overset{(e)}{u}(x_2)=\overset{(e)}{u}_2$ y que las funciones N_i son linealmente independientes, y la segunda propiedad permite modelar problemas en los cuales la variable dependiente u(x) es constante en un intervalo (un elemento); es decir, $u_1=u_2=u$, luego:

$$u=N_1u_1+N_2u_2=u(N_1+N_2)$$

o

$$1=N_1+N_2$$

Es importante hacer notar que la deducción de las funciones de interpolación no depende del problema en estudio, si no del tipo de elemento (geometría, número de nodos, etc.)

3.2.1.1.- Coordenadas naturales

En vez de deducir las funciones de interpolación con relación al sistema global de referencia, es mas conveniente hacerlo con respecto de un sistema local de referencia ξ, el cual

tiene su origen en el centro del elemento y está escalado de tal modo que $\xi = -1$ en el nodo izquierdo del elemento y $\xi = +1$ en el nodo derecho del mismo. En forma general, este tipo de transformación viene dada por la transformación lineal:

$$\xi = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{h_e} \tag{3.8}$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas globales de los nodos izquierdo y derecho, respectivamente, del elemento (e), y $h_e = x_2 - x_1$ es la longitud del elemento. La coordenada ξ se denomina *coordenada normal (o natural)* para significar que es una coordenada normalizada (adimensional) cuyos valores están siempre entre -1 y +1. La ec.(3.8) transforma los puntos x $(x_1 \le x \le x_2)$ en los puntos ξ $(-1 \le \xi \le +1)$.

El sistema coordenado normal es conveniente por dos razones: (1) facilita la construcción de las funciones de interpolación y (2) facilita la integración numérica de los coeficientes de las matrices locales de rigidez.

La deducción de las funciones de interpolación de Lagrange, en términos del sistema coordenado natural, está basado en que dichas funciones satisfacen, como ya se estableció anteriormente, la propiedad:

$$\psi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \ne j \end{cases} \tag{3.9}$$

donde ξ_j denota la coordenada j-ésima del elemento. Para un elemento con n nodos, $\psi_i \left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$ son funciones de grado n-1. Para construir ψ_i de tal modo que satisfaga la ec.(3.9), se procede de la siguiente manera:
Para cada ψ_i se forma el producto de n-1 funciones lineales $\xi - \xi_j$ $\left(j = 1,2, \cdots i-1, i+1, \cdots, n \; ; \; j \ne i\right)$:

$$\psi_i = C_i(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\cdots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\cdots(\xi - \xi_n) \tag{3.10}$$

Nótese que ψ_i es cero en todos los nodos excepto en el nodo i.

A continuación se debe determinar la constante C_i, de tal modo que $\psi_i = 1$ en $\xi = \xi_i$:

$$C_i = \left[(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\cdots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\cdots(\xi_i - \xi_n)\right]^{-1} \tag{3.11}$$

Entonces, la función de interpolación asociada al nodo i, viene dada por:

$$\psi_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\cdots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\cdots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2)\cdots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\cdots(\xi_i - \xi_n)} \tag{3.12}$$

La Fig.3.3 muestra las funciones de interpolación lineal, cuadrática y cúbica, expresadas en términos de la coordenada natural (para nodos igualmente espaciados), y en la Fig.3.4 se puede apreciar la representación gráfica de las mismas.

Como se verá más adelante, el cálculo de los coeficientes de las matrices locales involucra las derivadas e integrales de las funciones de interpolación con relación a la coordenada global x. Puesto que ahora las funciones de interpolación ψ_i están expresados en términos del sistema coordenado natural, se requiere una transformación del tipo:

$$x = f(\xi) \qquad ; \qquad \xi = g(x) \tag{3.13}$$

para re-escribir las derivadas e integrales en términos de ξ.

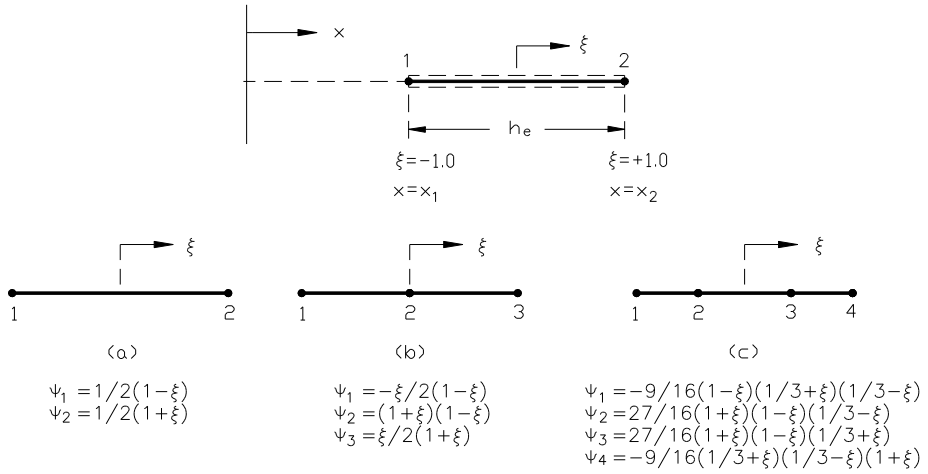


Fig.3.3 Familia de funciones de interpolación de Lagrange; caso unidimensional.

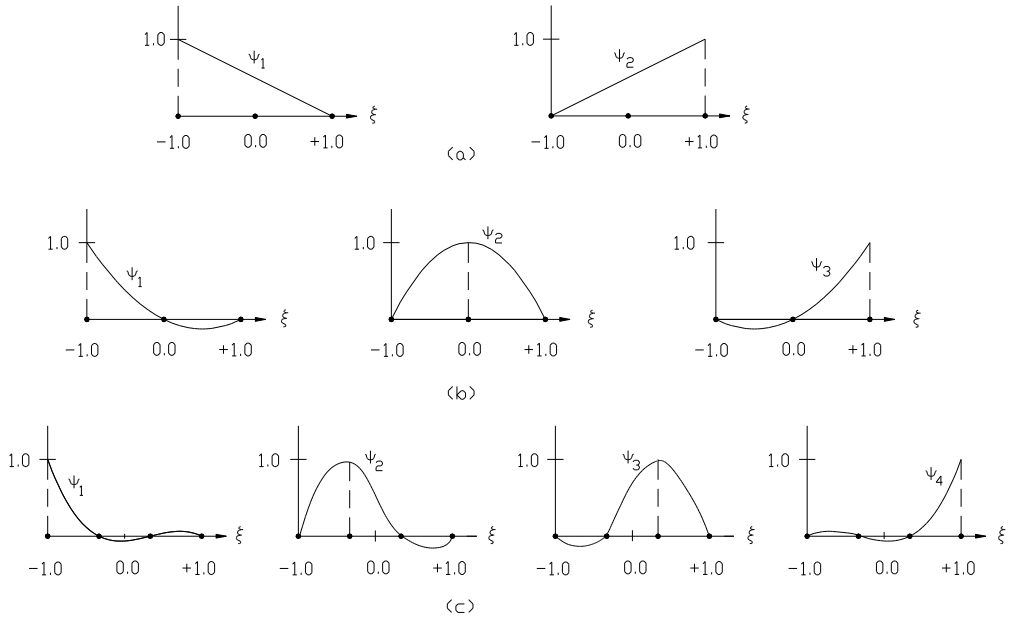


Fig.3.4 Representación gráfica de las funciones de interpolación de elementos unidimensiona-. les; (a) elemento lineal; (b) elemento cuadrático; (c) elemento cúbico.

La ec.(3.8) es un ejemplo de las funciones $f(\xi)$ y $g(x)$:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi\, h_e + x_1 + x_2\right) \tag{3.14a}$$

$$g(x) = \frac{2x - \left(x_1 + x_2\right)}{h_e} \tag{3.14b}$$

En este caso $f(\xi)$ y $g(x)$ son funciones lineales de ξ y x, respectivamente. La transformación dada por las ecs.(3.14) puede escribirse en términos de las funciones de interpolación:

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i \psi_i(\xi) \tag{3.15}$$

Luego, de la ecuación anterior:

$$dx = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{d\psi_i}{d\xi}\right) d\xi = J\, d\xi \tag{3.16}$$

donde J es el Jacobiano de la transformación,

$$J = \sum_{i=1}^{r} x_i \frac{d\psi_i}{d\xi} \tag{3.17}$$

y finalmente, términos como $d\psi_i/dx$ se pueden obtener mediante:

$$\frac{d\psi_i}{dx} = \frac{d\psi_i}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{dx/d\xi}\frac{d\psi_i}{d\xi} = J^{-1}\frac{d\psi_i}{d\xi} \tag{3.18}$$

3.2.1.2 Ejemplo 3.1: Distribución de temperatura en un elemento unidimensional

Supóngase que el estudio de la distribución de temperatura en una aleta se realizó mediante una malla de elementos unidimensionales y que la solución indica que la temperatura en los nodos *i* e *i+1*, del elemento *k*, es 50 ºC y 150 ºC, respectivamente, tal como se esquematiza en la Fig.e3.1.1. Se desea determinar la temperatura en un punto situado a 0.40 mts. del origen coordenado, y el gradiente de temperatura en el interior del elemento.

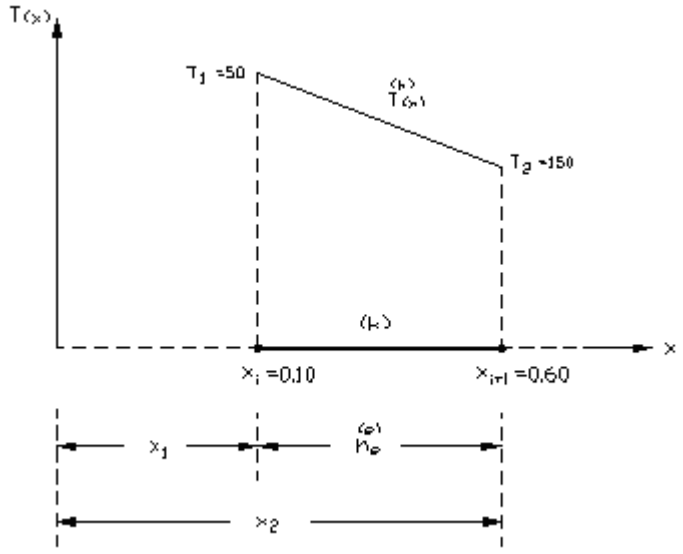
Para determinar la temperatura en el punto requerido, en primer lugar, habrá que efectuar el respectivo cambio de coordenadas. Así:

$$x = \Psi_1 x_1 + \Psi_2 x_2 \tag{a}$$

$$0.40 = \frac{1}{2}(1-\xi)0.10 + \frac{1}{2}(1+\xi)0.60 \quad \Rightarrow \qquad \xi = 0.20$$

$$T = \Psi_1 T_1 + \Psi_2 T_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)50 + \frac{1}{2}(1+\xi)150$$

$$T = 110^{o}\,C$$



Fif.e3.1.1 Distribución de temperatura en un elemento unidimensional lineal.

El gradiente de temperatura viene dado por:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$$

De la ec.(a), se tiene:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d\Psi_1}{d\xi}x_1 + \frac{d\Psi_2}{d\xi}x_2 = -0.50\times 0.10 + 0.50\times 0.60 = 0.25$$

y por lo tanto:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{0.25} = 4.0$$

Finalmente:

$$\frac{dT}{dx} = 4\left[\frac{d\Psi_1}{d\xi}T_1 + \frac{d\Psi_2}{d\xi}T_2\right] = 200.0^{o}\,C/m$$

3.2.2.- Elementos de Hermite

Así como los polinomios de Lagrange permiten obtener funciones de interpolación de diferente orden, cuando los valores del campo de la variable primaria están especificados en los nodos, los polinomios de Hermite permiten construir funciones de interpolación cuando tanto los valores de la variable primaria como el de sus derivadas están especificadas en los nodos

Para ilustrar una aplicación simple de los elementos de Hermite, supóngase que se desea construir las funciones de interpolación de un elemento unidimensional, de dos nodos por

elemento, con la variable u y el de su derivada (du/dx), especificadas como grados de libertad en cada nodo.

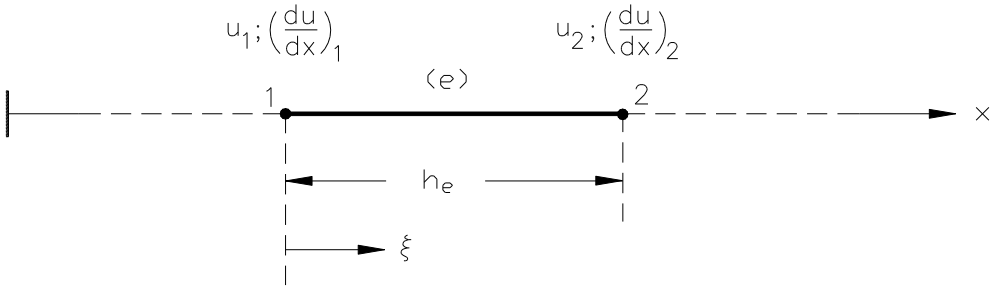


Fig.3.5 Elemento unidimensional cúbico de Hermite.

Un elemento de este tipo es llamado *elemento cúbico de Hermite* y las funciones de interpolación asociadas se denominan *funciones de interpolación cúbicas de Hermite*. Puesto que este elemento tiene cuatro grados de libertad, se tiene que la aproximación de u vendrá dada por:

$$u_e = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \tag{3.19}$$

donde ξ es la coordenada local. Los parámetros a_i deben evaluarse en términos de los valores nodales de u_e y de du_e/dx. Luego, se tendrá que:

$$u_e(0) \equiv \overset{(e)}{u}_1 = a_0 \qquad ; \qquad \frac{du_e}{dx}(0) \equiv \overset{(e)}{u}_2 = a_1 \tag{3.20a}$$

$$u_e(h_e) \equiv \overset{(e)}{u}_3 = a_0 + a_1 h_e + a_2 h^2{}_e + a_3 h_e{}^3 \tag{3.20b}$$

y por lo tanto:

$$\frac{du_e}{dx}(h_e) \equiv \overset{(e)}{u}_4 = a_1 + 2a_2 h_e + 3a_3 h_e{}^2 \tag{3.20c}$$

donde h_e es la longitud del elemento. Resolviendo las ecs.(3.20) para a_0, a_1, a_2 y a_3, en términos de $\overset{(e)}{u}_1, \overset{(e)}{u}_2, \overset{(e)}{u}_3$ y $\overset{(e)}{u}_4$ y sustituyendo el resultado en la ec.(3.19), se obtiene:

$$u_e(\xi) = \sum_{j=1}^{4} u_j{}^{(e)} \psi_j{}^{(e)} \tag{3.21}$$

donde $\overset{(e)}{u}_1$ y $\overset{(e)}{u}_3$ son los valores nodales de u_e, $\overset{(e)}{u}_2$ y $\overset{(e)}{u}_4$ son los valores nodales de du_e/dx, y $\psi_j{}^{(e)}$ son los polinomios cúbicos de Hermite, los cuales vienen dados por:

$$\psi_1{}^{(e)}(\xi) = 1 - 3\left(\frac{\xi}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi}{h_e}\right)^3 \qquad \psi_2{}^{(e)}(\xi) = -\xi\left[\left(\frac{\xi}{h_e}\right) - 1\right]^2 \tag{3.22a}$$

$$\psi_3^{(e)}(\xi)=3\left(\frac{\xi}{h_e}\right)^2-2\left(\frac{\xi}{h_e}\right)^3 \qquad \psi_4^{(e)}(\xi)=-\xi\left[\left(\frac{\xi}{h_e}\right)^2-\left(\frac{\xi}{h_e}\right)\right] \tag{3.22b}$$

Estas funciones se muestran en la Fig.3.6. Siguiendo un esquema similar, se puede obtener elementos de Hermite de orden superior al aquí presentado.

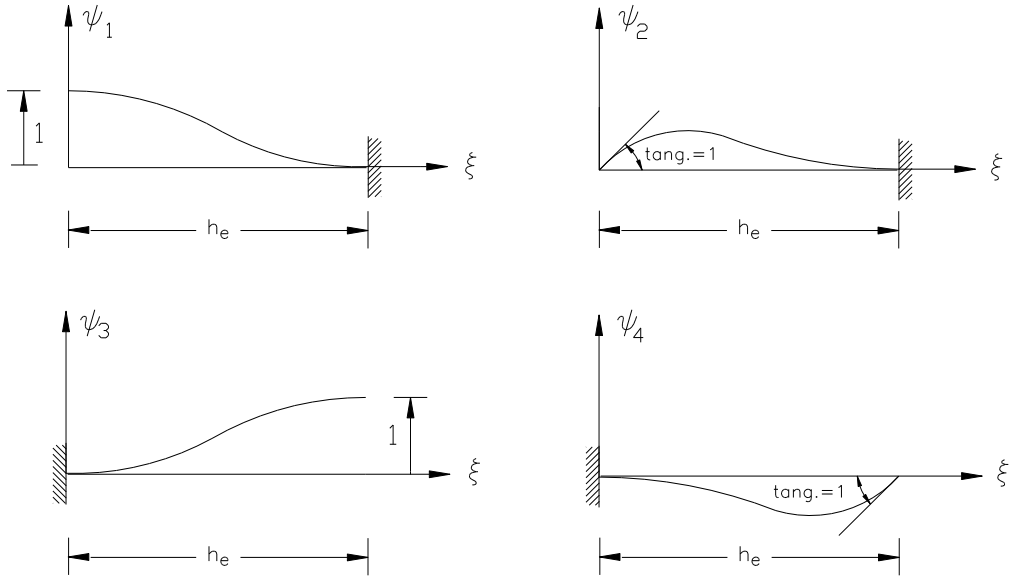


Fig.3.6 Funciones de interpolación del elemento cúbico de Hermite.

3.3.- Elementos bidimensionales

En los problemas bidimensionales no solo se busca una solución aproximada a un problema de valor de contorno, si no también se debe aproximar el dominio del problema mediante una malla de elementos finitos apropiada. Luego, en el análisis de problemas bidimensionales mediante el **mef**, se tendrán errores en la aproximación (debido a la aproximación de la solución), así como también errores en la discretización (debido a la aproximación del dominio). La discretización, entonces, consistirá en elementos bidimensionales simples, tales como triángulos, rectángulos y/o cuadriláteros que se conectarán entre si en los nodos de los contornos de los elementos.

3.3.1.- Funciones de interpolación de elementos bidimensionales

Existe una correspondencia entre el número de nodos, su localización, el número de las variables primarias por nodo en un elemento finito, y el número de términos usados en las aproximaciones polinomiales de la variable dependiente sobre un elemento. En problemas unidimensionales de segundo orden, el número de nodos *n* en un elemento, define el grado *r* del polinomio, siendo la correspondencia entre *n* y *r* igual *n=r+1*. En el caso de problemas bidimensionales de segundo orden, la correspondencia entre el número de nodos (el cual es igual al número de términos en el polinomio de aproximación), y el grado del polinomio no es única. Por ejemplo, el polinomio:

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \tag{3.23}$$

contiene tres términos (linealmente independientes), y es lineal tanto en x como en y. Por otro lado, el polinomio:

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y \tag{3.24}$$

contiene cuatro términos (linealmente independientes), pero también es lineal en x y en y. El primero requiere un elemento con tres nodos (una variable primaria por nodo), mientras que el segundo requiere un elemento con cuatro nodos. Un elemento bidimensional con tres nodos es un triángulo con los nodos en los vértices del mismo. Cuando el número de nodos es igual a cuatro, se puede seleccionar un elemento triangular con el cuarto nodo en el centro (centroide) del triángulo, o un rectángulo (o cuadrilátero) con los nodos en los vértices del rectángulo.

Un polinomio con cinco constantes es el polinomio cuadrático (incompleto):

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y + a_5 (x^2 + y^2) \tag{3.25}$$

el cual puede usarse para formar un elemento de cinco nodos (p. e., un rectángulo con un nodo interno en el centro del mismo). De igual modo, el polinomio cuadrático

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x y + a_5 x^2 + a_6 y^2 \tag{3.26}$$

con seis constantes puede usarse para formar un elemento con seis nodos (p.e., un triángulo con un nodo en cada vértice y uno en el punto medio de cada lado). En la Fig.3.7 se muestran elementos bidimensionales con tres, cuatro, cinco y seis nodos por elemento.

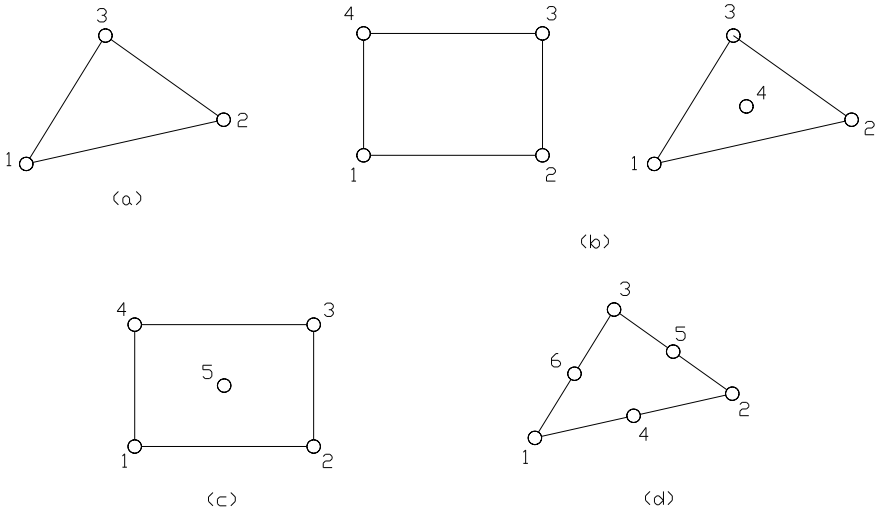


Fig.3.7 Elementos finitos bidimensionales; (a) Elemento triangular de tres nodos; (b) Elemento rectangular de cuatro nodos;(c) Elemento rectangular de cinco nodos; (d) Elemento triangular de seis nodos.

3.3.2.- Funciones de interpolación del elemento triangular lineal

En Capítulo II, se dedujeron las funciones de interpolación de este elemento (ver Fig.2.14), las cuales vienen dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(a_1 + b_1 x + c_1 y\right) \qquad \begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 = y_2 - y_3 \\ c_1 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left(a_2 + b_2 x + c_2 y\right) \qquad \begin{cases} a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ b_2 = y_3 - y_1 \\ c_2 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left(a_3 + b_3 x + c_3 y\right) \qquad \begin{cases} a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_3 = y_1 - y_2 \\ c_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

donde:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

y por lo tanto, la aproximación de una variable dada, ϕ, podrá efectuarse, como ya se estableció mediante:

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 = \overset{(e)}{N}_i(x, y)\,\phi_i \tag{3.27}$$

En forma compacta, las funciones de interpolación de este elemento pueden escribirse como:

$$\overset{(e)}{N}_i = \frac{1}{2A_e}\left(a_i + b_i\, x + c_i\, y\right) \qquad , \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.28}$$

y a_i , b_i y c_i son las constantes:

$$\left.\begin{array}{l} a_i = x_j\, y_k - x_k\, y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{array}\right\} \begin{array}{c} i \neq j \neq k \\ \text{y} \\ \text{i, j, k se permutan en el} \\ \text{el orden natural} \end{array} \tag{3.29}$$

Por ejemplo, a_2 se obtiene haciendo i=2, j=3 y k=1 en la ec.(3.29):

$$a_2 = x_3\, y_1 - x_1\, y_3$$

y c_3 se obtiene haciendo i=3, j=1 y k=2:

$$c_3 = x_2\, x_1$$

etc.

En la Fig.3.8 se muestran las funciones de interpolación de este elemento. Nótese que N_i tiene las propiedades:

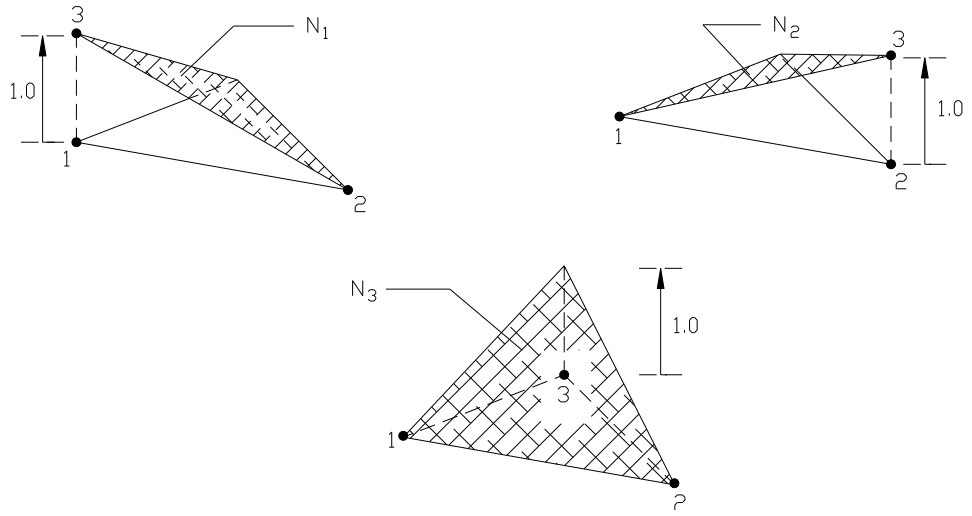


Fig.3.8 Funciones de interpolación del elemento triangular lineal.

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3 \tag{3.30}$$

$$\sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) = 1$$

Debe hacerse notar que la ec.(3.27) determina una superficie plana que pasa a través de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3. Por lo tanto este elemento aproximará la superficie curva $\phi(x,y)$ mediante una función plana $N_i\, \phi_i \ (i = 1,2,3)$.

3.3.2.1.- Ejemplo 3.2. Distribución de presiones en un elemento bidimensional

En un dominio triangular se ha medido la presión en los puntos indicados en la Fig.e3.2.1.Se desea determinar la presión en el punto $P_A = P(3;4)$.

Si se conocen los valores de la presión en los nodos del elemento triangular, la presión en cualquier punto del elemento se determina mediante:

$$P = N_1 P_1 + N_2 P_2 + N_3 P_3 \tag{a}$$

donde las funciones de interpolación N_i vienen dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(a_1 + b_1 x + c_1 y\right) \tag{b1}$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left(a_2 + b_2 x + c_2 y\right) \tag{b2}$$

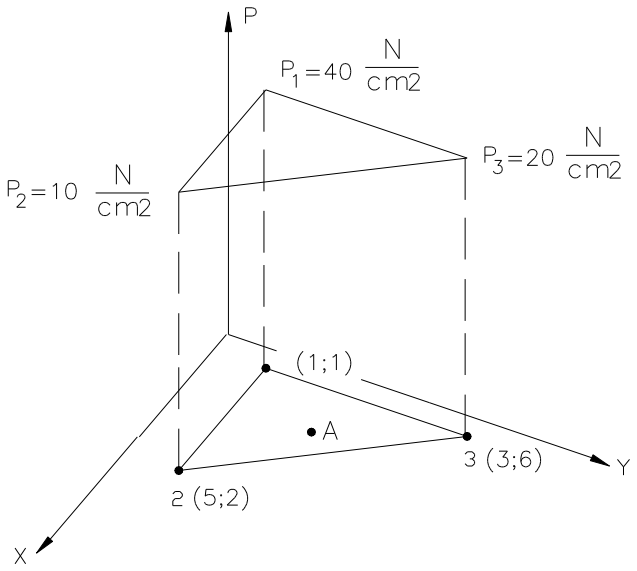


Fig.e3.2.1 Distribución de presiones sobre un elemento triangular lineal.

$$N_3 = \frac{1}{2A}\left(a_3 + b_3 x + c_3 y\right) \tag{b3}$$

donde:

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 = 5(6) - 3(2) = 24$$
$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 = 3(1) - 1(6) = -3$$
$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1(2) - 5(1) = -3$$

$$b_1 = y_2 - y_3 = 2 - 6 = -4$$
$$b_2 = y_3 - y_1 = 6 - 1 = 5$$
$$b_3 = y_1 - y_2 = 1 - 2 = -1$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = 3 - 5 = -2$$
$$c_2 = x_1 - x_3 = 1 - 3 = -2$$
$$c_3 = x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4$$

y

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1(30-6) - 1(6-2) + 1(3-5) = 18$$

Luego:

$$P = \frac{1}{18}\left[(24 - 4x - 2y)P_1 + (-3 + 5x - 2y)P_2 + (-3 - 1x + 4y)P_3\right]$$

En el punto A(x;y) = A(3;4)

$$P_A = 28.89\,N/cm^2$$

3.3.3.- Coordenadas naturales para elementos triangulares

En el caso de elementos triangulares, el procedimiento de interpolación está íntimamente asociado a la idea de las llamadas coordenadas naturales o coordenadas de área, como también se les conoce. Estas coordenadas no solo facilitan la construcción de las funciones de interpolación del elemento triangular lineal, si no también proporcionan un método muy adecuado para deducir las funciones de interpolación de elementos triangulares de orden superior.

En la Fig.3.9 se muestra la numeración de los nodos y lados de un elemento triangular lineal con lo cual se puede organizar un método efectivo para construir las funciones de interpolación de este elemento, en términos de las coordenadas de área. Como puede observarse, los lados de este elemento se identifican mediante la numeración del vértice opuesto; por ejemplo, el lado 1 está opuesto al nodo 1.

En primer lugar se debe localizar un punto en el interior del triángulo, tal como se muestra en la figura anterior, luego se trazan las líneas desde dicho punto hacia los vértices del triángulo. Se puede notar que el triángulo queda subdividido en los triángulos de áreas A_1, A_2 y A_3, donde los suscritos identifican a los lados adyacentes. Las coordenadas de área L_i $(i = 1,2,3)$ son, por definición, las relaciones de entre las áreas A_i y el área total A; es decir:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \qquad L_2 = \frac{A_2}{A} \qquad L_3 = \frac{A_3}{A} \tag{3.31}$$

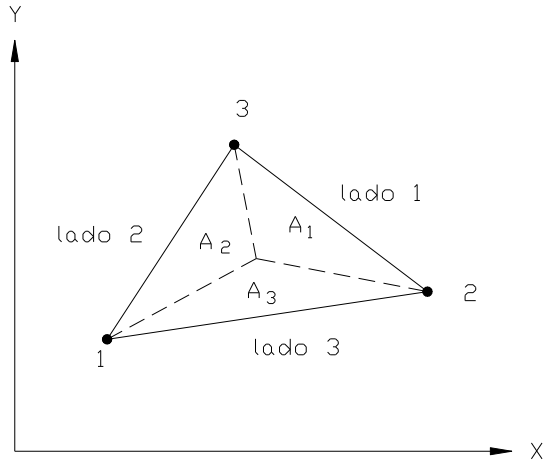


Fig.3.9 Coordenadas de área del elemento triangular lineal.

por supuesto que la suma de las áreas A_i es igual a A, luego:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \tag{3.32}$$

dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre A, se obtiene:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \tag{3.33}$$

De la ecuación anterior, se deduce que sólo dos de las coordenadas de área pueden ser independientes, tal como en el sistema de coordenadas original, donde solo existen dos coordenadas independientes.

Ahora, las coordenadas de área pueden usarse para describir las coordenadas rectangulares x y y de un punto sobre el elemento; es decir:

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \end{aligned} \tag{3.34}$$

La validez de las ecuaciones anteriores se puede establecer mediante una sencilla prueba: supóngase que se mueve el punto en el interior del triángulo hasta hacerlo coincidir con el punto 1, entonces $A_1 = A,\ A_2 = A_3 = 0$ y $L_1 = 1,\ L_2 = L_3 = 0$. Esto confirma que $x = x_1$ cuando x está localizado en el nodo 1. Obviamente, las coordenadas de área son idénticamente iguales a las funciones de interpolación del elemento triangular lineal deducidas en la sección anterior. El lector podrá confirmar esta afirmación invirtiendo el sistema formado por las ecs.(3.33) y (3.34).

3.3.4.- Elementos triangulares de orden superior

El elemento triangular lineal presentado en la sección anterior, es el primero de una serie infinita de elementos triangulares que puede ser especificada. La Fig.3.10 muestra una parte de la familia de elementos triangulares de orden superior obtenidos mediante la asignación adicional de nodos, tanto en el interior como en los contornos de los triángulos.

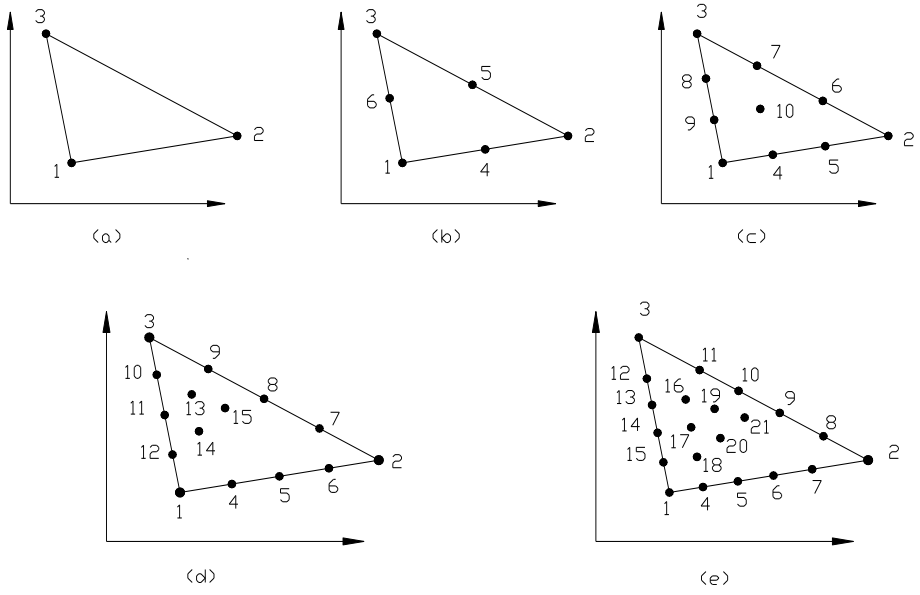


Fig.3.10 Elementos triangulares de orden superior; (a) Elemento lineal; (b) Elemento cuadrático; (c) Elemento Cúbico; (d) Elemento con 21 nodos.

En cada caso, deben verificarse los requerimientos de compatibilidad y el grado de completivo de las funciones de interpolación. Por ejemplo en la Fig.3.10c, el elemento contiene diez nodos y cada lado tiene cuatro nodos. Esto es suficiente para especificar una variación cúbica de la variable dependiente en el interior del elemento y a lo largo de los contornos del mismo. En general, para triángulos con nodos dispuestos como se muestra en la Fig.3.10, un polinomio completo de orden n requiere de $1/2(n+1)(n+2)$ nodos.

Antes de presentar el procedimiento para deducir las funciones de interpolación de esta familia de elementos, es necesario introducir el esquema de numeración de los nodos. Los nodos de los elementos mostrados en la Fig.3.10, pueden rotularse mediante tres dígitos α, β y γ que satisfagan la relación $\alpha+\beta+\gamma=n$, donde n es el orden del polinomio de interpolación en cada elemento. Estos números especifican una línea coordenada constante en el sistema de coordenadas de área, e indican el número de pasos o niveles, mediante los cuales un nodo en particular se localiza desde un lado de un triángulo.

La Fig.3.11a muestra la especificación de un nodo típico dentro de un triángulo, mientras que la Fig.3.11b muestra la especificación completa de los nodos en un elemento triangular cúbico de diez nodos (p.e., el nodo en el interior del elemento tiene la designación (111). Esta misma notación se puede utilizar para las funciones de interpolación. En efecto, empleando los mismos suscritos anteriores se puede escribir $N_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3)$ para denotar las funciones de interpolación asociadas al nodo $\alpha\beta\gamma$, como una función de las coordenadas de área L_1, L_2, L_3.

En su trabajo "Higher Order Polynomial Triangular Finite Elements for Potencial Problems", Sylvester mostró que las funciones de interpolación de un elemento triangular de orden n puede especificarse mediante la siguiente forma:

$$N_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3) = N_\alpha(L_1)\, N_\beta(L_2)\, N_\gamma(L_3) \tag{3.35}$$

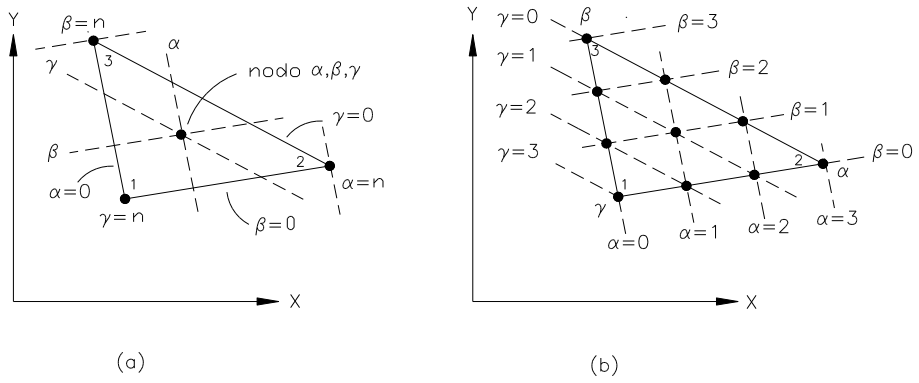


Fig.3.11 Identificación nodal mediante tres dígitos; (a) identificación de un nodo genérico en el triángulo; (b) identificación de los nodos en un elemento triangular cúbico.

donde

$$N_\alpha(L_1) = \prod_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{nL_1 - i + 1}{i}\right) \quad , \quad \alpha \geq 1 \tag{3.36a}$$

$$N_\alpha(L_1) = 1 \quad , \quad \alpha = 0 \tag{3.36b}$$

Para $N_\beta(L_2)$ y $N_\gamma(L_3)$, las fórmulas tienen idéntica forma. Las ecs.(3.36) proporcionan un medio para construir las funciones de interpolación para todos los elementos de orden superior de la serie de elementos mostrada en la Fig.3.10. Supóngase, por ejemplo, que se desea desarrollar las funciones de interpolación para el elemento triangular de seis nodos, mostrado en la Fig.3.10b. Puesto que las funciones son cuadráticas n=2, y con la notación descrita, las funciones de interpolación a determinar son: $N_{200}, N_{020}, N_{002}$ para los tres nodos de los vértices y $N_{101}, N_{110}, N_{011}$ para los tres nodos situados en el medio de los lados. Considérese por ejemplo, la construcción de la función N_{020}; es decir, $\alpha = 0$, $\beta = 2$ y $\gamma = 0$. De las ecs.(3.36), se tiene que:

$$N_\alpha = N_0 = 1$$

$$N_\beta = N_2 = \prod_{i=1}^{2}\left(\frac{2L_2 - i + 1}{i}\right) = \left(\frac{2L_2 - 1 + 1}{1}\right)\left(\frac{2L_2 - 2 + 1}{2}\right)$$

$$N_\beta = N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

y

$$N_\gamma = N_0 = 1$$

por lo tanto:

$$N_{020} = N_0(L_1)N_2(L_2)N_0(L_3) \qquad \Rightarrow \qquad N_{020} = L_2(2L_2 - 1)$$

De igual modo, es fácil verificar que:

$$N_{200} = L_1(2L_1 - 1) \quad ; \quad N_{002} = L_3(2L_3 - 1) \quad ; \quad N_{101} = 4L_1 L_3$$
$$N_{110} = 4L_1 L_2 \quad ; \quad N_{011} = 4L_2 L_3 \tag{3.37}$$

Es fácil comprobar que las funciones de interpolación del elemento triangular cúbico, de diez nodos, mostrado en la Fig.3.11c, son:

$$\begin{aligned}
N_{300} &= \frac{1}{2}L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \quad , \quad N_{030} = \frac{1}{2}L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2) \\
N_{003} &= \frac{1}{2}L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2) \quad , \quad N_{210} = \frac{9}{2}L_1 L_2(3L_1 - 1) \\
N_{120} &= \frac{9}{2}L_1 L_2(3L_2 - 1) \quad , \quad N_{021} = \frac{9}{2}L_2 L_3(3L_2 - 1) \\
N_{012} &= \frac{9}{2}L_2 L_3(3L_3 - 1) \quad , \quad N_{102} = \frac{9}{2}L_1 L_3(3L_3 - 1) \\
N_{201} &= \frac{9}{2}L_1 L_3(3L_1 - 1) \quad , \quad N_{111} = 27L_1 L_2 L_3
\end{aligned} \tag{3.38}$$

3.3.5.- Funciones de interpolación del elemento rectangular lineal

El polinomio de interpolación asociado al elemento rectangular lineal viene dado por la ec.(3.24):

$$u(x,y) = a_1 + a_2\, x + a_3\, y + a_4\, x\, y$$

la cual, en forma matricial se escribe:

$$u(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

En la Fig.3.12 se muestra un elemento de este tipo de lados a y b y el sistema de referencia adoptado para la deducción de las funciones de interpolación. Evaluando la ecuación anterior en los nodos del elemento se obtiene:

$$\begin{aligned} u(x_1,y_1) &= u(0,0) = u_1 \qquad & u(x_2,y_2) &= u(a,0) = u_2 \\ u(x_3,y_3) &= u(a,b) = u_3 \qquad & u(x_4,y_4) &= u(0,b) = u_4 \end{aligned} \tag{3.40}$$

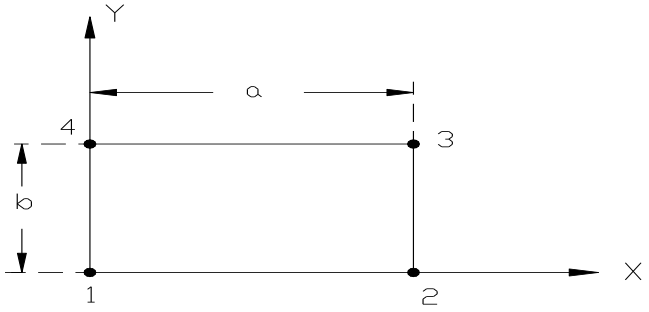


Fig.3.12 Elemento rectangular lineal y sistema de referencia asociado.

Luego:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

Como ya se ha visto, el procedimiento convencional de la deducción de las funciones de interpolación requiere el conocimiento de las constantes a_i, par lo cual de debe invertir la matriz del sistema de ecuaciones anterior, lo cual conduce a:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{ab}\begin{bmatrix} ab & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

Sustituyendo la ec.(3.42) en la ec.(3.39), resulta:

$$u(x,y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \tag{3.43}$$

donde:

$$N_1(x,y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad N_2(x,y) = \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_3(x,y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} \qquad N_4(x,y) = \frac{x}{a}\frac{y}{b} \tag{3.44}$$

La forma de estas funciones de interpolación se muestran en la Fig.3.13. De nuevo, es fácil verificar que:

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{4} N_i(x,y) = 1 \qquad i, j = 1,2,3,4 \tag{3.45}$$

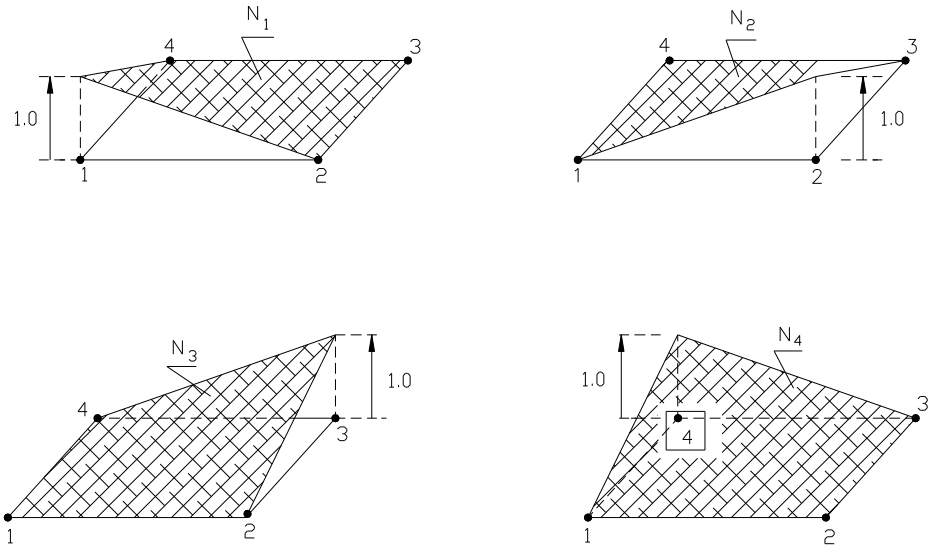


Fig.3.13 Funciones de interpolación del elemento rectangular lineal.

Es importante destacar que una de las principales diferencias entre este elemento y el elemento triangular de tres nodos, reside en el hecho que, mientras que en este elemento los gradientes son constantes en el interior del mismo, en el elemento rectangular de cuatro nodos los gradientes son función de una de las coordenadas; es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + a_4 y \qquad ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = a_3 + a_4 x$$

el gradiente en la dirección *x* es constante en esa dirección pero lineal en la dirección *y*, y viceversa para el gradiente en la dirección *y*.

Las funciones de interpolación de los elementos rectangulares con lados paralelos al sistema global de coordenadas pueden, sin embargo, deducirse de una manera más fácil utilizando los conceptos de interpolación Lagrangeana vistos en la sección 3.3.1.a. A pesar que dichos conceptos fueron presentados únicamente para el caso unidimensional, se pueden generalizar a dos o más dimensiones, formando el producto de las funciones de interpolación unidimensionales, asociadas a la dirección de la coordenada respectiva. En el caso del elemento rectangular lineal, se puede verificar que este producto viene dado por:

$$\begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ \frac{x}{a} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{y}{b}\right) & \frac{y}{b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_4 \\ N_2 & N_3 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

El lector podrá constatar que el producto indicado conduce a las mismas funciones de interpolación dadas en las ecs.(3.44).

3.3.6.- Elementos rectangulares de orden superior

En la Fig.3.14, se muestra un conjunto de elementos rectangulares de orden superior de la familia Lagrangeana, la cual puede construirse, tal como se describió en la sección anterior, efectuando el producto de las funciones de interpolación Lagrangeanas unidimensionales en la dirección x, con la funciones de interpolación Lagrangeanas unidimensionales en la dirección y.

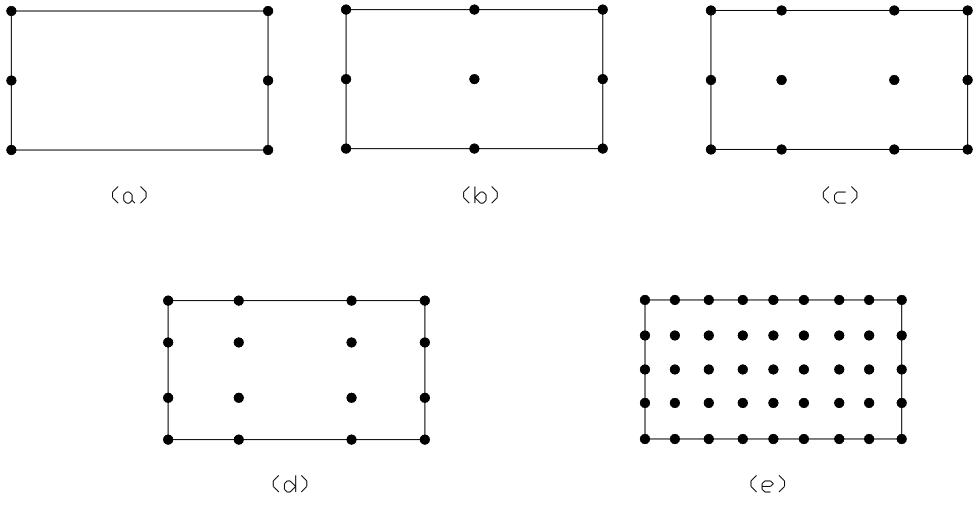


Fig.3.14 Algunos elementos de la serie infinita de elementos rectangulares Lagrangeanos.

A modo de ejemplo se deducirán las funciones de interpolación de los dos primeros elementos mostrados en la Fig.3.14. Así para el primero de ellos, el cual es lineal en la dirección *x*

y cuadrático en la dirección *y*, sus respectivas funciones de interpolación se obtienen efectuando el siguiente producto:

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_3 & N_5 \\ N_2 & N_4 & N_6 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \{ g_1 \quad g_2 \quad g_3 \} = \begin{bmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 & f_1 g_3 \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 & f_2 g_3 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

$$= \begin{Bmatrix} \left(1-\frac{x}{a}\right) \\ \frac{x}{a} \end{Bmatrix} \left\{ \left(1-2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad 4\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right) \quad \frac{y}{b}\left(2\frac{y}{b}-1\right) \right\}$$

donde $f_i(x)$ y $g_i(y)$ son las funciones de interpolación unidimensionales a lo largo de las direcciones X y Y, respectivamente. Efectuando el producto indicado se obtiene:

$$N_1 = \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.48a}$$

$$N_2 = \frac{x}{a}\left(1-2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.48b}$$

$$N_3 = \left(1-\frac{x}{a}\right)4\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.48c}$$

$$N_4 = \frac{x}{a}\,4\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.48d}$$

$$N_5 = \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\left(2\frac{y}{b}-1\right) \tag{3.48e}$$

$$N_6 = \frac{x}{a}\,\frac{y}{b}\left(2\frac{y}{b}-1\right) \tag{3.48f}$$

las cuales están asociadas al sistema de numeración indicado en la Fig.3.15.

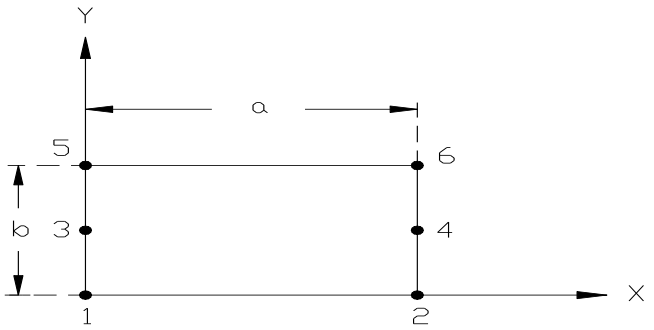


Fig.3.15 Sistema de numeración asociado a las funciones de interpolación de la Fig.3.14a.

Para el segundo elemento, el cual es cuadrático en ambas direcciones, el producto de las funciones de interpolación unidimensionales, asociadas a la numeración nodal mostrada en la Fig.3.16, se expresa:

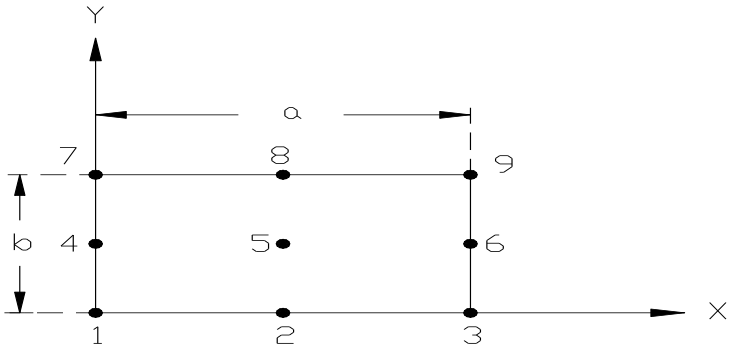


Fig.3.16 Sistema de numeración asociado a las funciones de interpolación de la Fig.3.14b.

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_4 & N_7 \\ N_2 & N_5 & N_8 \\ N_3 & N_6 & N_9 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{(x-a/2)(x-a)}{(-a/2)(-a)} \\ \dfrac{x(x-a)}{a/2(a/2-a)} \\ \dfrac{x(x-a/2)}{a(a/2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{(y-b/2)(y-b)}{b^2/2} & \dfrac{y(y-b)}{-b^2/4} & \dfrac{y(y-b/2)}{b^2/2} \end{Bmatrix}$$

$$= \{f\}\{g\}^T = \begin{bmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 & f_1 g_3 \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 & f_2 g_3 \\ f_3 g_1 & f_3 g_2 & f_3 g_3 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

donde, de nuevo, las funciones $f_i(x)$ y $g_i(y)$ tienen el mismo significado anterior. La ec.(3.49) conduce a las siguientes funciones de interpolación:

$$N_1 = \left(1-2\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.50a}$$

$$N_2 = 4\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.50b}$$

$$N_3 = \frac{x}{a}\left(2\frac{x}{a}-1\right)\left(1-2\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.50c}$$

$$N_4 = \left(1-2\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)4\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.50d}$$

$$N_5 = 4\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)4\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.50e}$$

$$N_6 = \frac{x}{a}\left(2\frac{x}{a}-1\right)4\frac{y}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) \tag{3.50f}$$

$$N_7 = \left(1-2\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\left(2\frac{y}{b}-1\right) \tag{3.50g}$$

$$N_8 = 4\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\left(2\frac{y}{b}-1\right) \tag{3.50h}$$

$$N_9 = \frac{x}{a}\left(2\frac{x}{a}-1\right)\frac{y}{b}\left(2\frac{y}{b}-1\right) \tag{3.50i}$$

3.3.7.- Coordenadas naturales de los elementos rectangulares

Desde el punto de vista de la integración numérica de las ecuaciones de los elementos que se generan en la aplicación de algún modelo matemático (residuos pesados, métodos variacionales, etc.), a un problema dado, resulta mucho más conveniente deducir las funciones de interpolación de los elementos rectangulares con relación a un sistema de coordenadas locales (ξ,η), cuyo origen está localizado en el centro del elemento, y tal que $-\leq(\xi,\eta)\leq+1$. Estas coordenadas reciben el nombre de coordenadas naturales, y están relacionadas con el sistema global de referencia (x,y) a través de:

$$\xi = \frac{2(x-x_1)-a}{a} \qquad\qquad \eta = \frac{2(y-y_1)-b}{b} \tag{3.51}$$

donde x_1 y y_1 son las coordenadas globales del nodo 1 (en este caso $x_1 = y_1 = 0$). En la Fig.3.17 se muestra un elemento rectangular lineal asociado al sistema local de referencia (ξ,η).

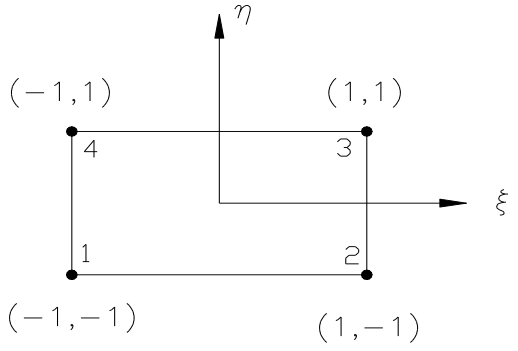


Fig.3.17 Elemento rectangular lineal y sistema local de referencia (ξ,η).

Con respecto a este sistema de referencia, las funciones dadas en las ecs.(3.44) se escriben de la siguiente manera:

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad \psi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$\psi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad \psi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{3.52}$$

Con relación al sistema natural de coordenadas (ξ,η), las funciones de interpolación del elemento de transición de la Fig14.a, el cual se muestra ahora en su sistema local de referencia en la Fig.3.18, vienen dadas por:

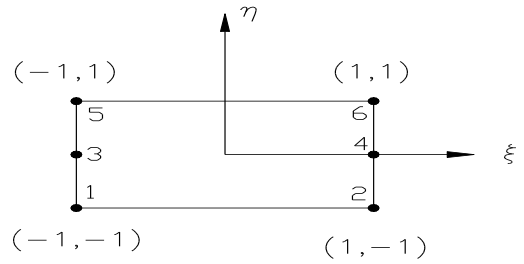


Fig.3.18 Elemento rectangular de transición referido al sistema local (ξ,η).

$$\psi_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\eta \qquad \psi_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\eta$$
$$\psi_3 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \qquad \psi_4 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \tag{3.53}$$
$$\psi_5 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\eta \qquad \psi_6 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\eta$$

Es fácil verificar que las funciones de interpolación del elemento bicuadrático relacionadas con el sistema natural de coordenadas (ξ,η),que se muestra en la Fig.3.19 son:

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta \qquad \psi_2 = -\frac{1}{2}(1+\xi^2)(1-\eta)\eta$$
$$\psi_3 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta \qquad \psi_4 = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$
$$\psi_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \qquad \psi_6 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi \tag{3.54}$$
$$\psi_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta \qquad \psi_8 = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)\eta$$

$$\psi_9 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta$$

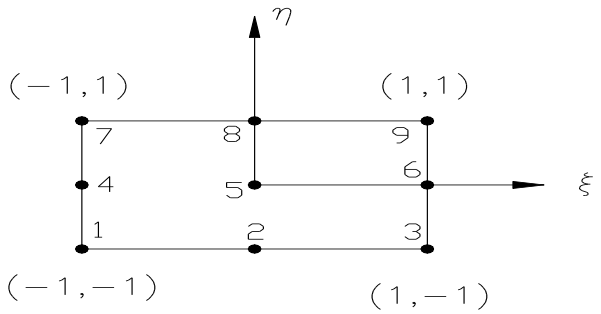


Fig.3.19 Elemento rectangular bicuadrático referido al sistema local (ξ,η).

Es importante hacer notar que en los tres casos, las funciones de interpolación están asociadas a la numeración nodal mostrada. Si los nodos fueran renumerados, los suscritos de las funciones de interpolación deben también modificarse de acuerdo con los cambios realizados

Siguiendo un procedimiento análogo se pueden deducir las funciones de interpolación para cualquier otro elemento de la familia de elementos rectangulares lagrangianos.

3.3.8.- Elementos serendipity

Los nodos internos de los elementos de orden superior de la familia de Lagrange no contribuyen a la conectividad inter-elementos, pudiendo por lo tanto ser retirados del interior de los mismos, de tal modo que el tamaño de las matrices de los elementos puede reducirse. Una forma de evitar los nodos internos presentes en los elementos Lagrangianos, consiste en usar los elementos llamados "serendipity", los cuales no tienen nodos internos; es decir, todos los nodos en este tipo de elementos están situados sobre su contorno. Las funciones de interpolación de los elementos serendipity, no pueden obtenerse mediante el producto de las funciones de interpolación unidimensionales como en el caso de los elementos lagrangianos. En su lugar, se usa un procedimiento alterno que emplea las condiciones del tipo de las ecs.(3.30):

$$N_i\left(x_j, y_j\right) = \delta_{ij} \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots,r$$

donde r es el número de elemento por elemento. Dicho procedimiento se ilustrará con el elemento serendipity rectangular cuadrático de 8 nodos mostrado en la Fig.3.20.

El polinomio de interpolación de este elemento, con relación al sistema local de referencia (ξ,η) es:

$$u(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 \tag{3.55}$$

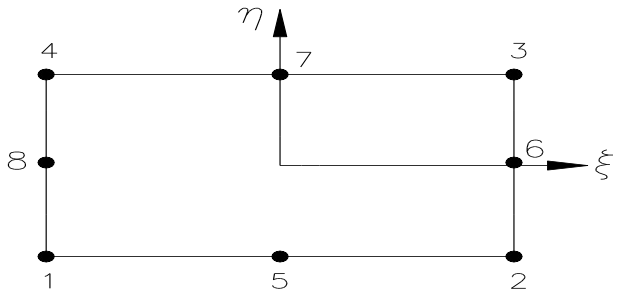


Fig.3.20 Elemento serendipity cuadrático de ocho nodos.

De acuerdo con la ecs.(3.30), las funciones de interpolación vale uno en el nodo que se está considerando (i.e., i=j), y cero en todos los demás nodos (i.e., $i \neq j$), y por lo tanto, también serán cero a lo largo de todos los contornos del elemento sobre los cuales el nodo de interés no pertenece. Por ejemplo, la función ψ_1 del elemento mostrado en la figura anterior valdrá cero en todos los nodos, excepto en el nodo 1 donde valdrá uno. Adicionalmente será igual a cero en todos los nodos situados sobre los lados $\xi = 1$ y $\eta = 1$. La función de interpolación del nodo 2 será cero en todos los nodos situados sobre los lados $\xi = 1, \eta = 1$ y $\eta = -1$. Así, si se definen las funciones que se indican sobre los lados del elemento rectangular lineal de la Fig.3.21, puede verificarse que el producto de cualesquiera dos de estos términos, da los primeros cuatro términos del polinomio de la ec.(3.55).

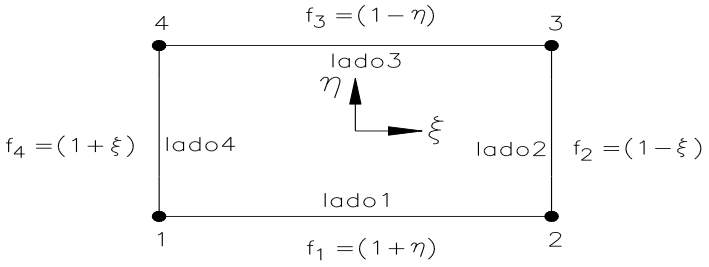


Fig.3.21 Funciones de contorno del elemento rectangular lineal.

Por lo tanto, las funciones de interpolación de este elemento pueden escribirse como el producto de dos polinomios; es decir:

$$\psi_i(\xi,\eta) = (a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta) \tag{3.56}$$

El procedimiento para la deducción de las funciones de interpolación es entonces el siguiente:

En primer lugar se definen, sobre los contornos del elemento, las funciones:

$$f_1 = (1+\eta) \qquad f_2 = (1-\xi) \qquad f_3 = (1-\eta) \qquad f_4 = (1+\xi) \tag{3.57}$$

Nótese que cada una de estas funciones se anula sobre uno de los contornos del elemento. A continuación se define otro conjunto de funciones F_i (i=1,2,3,4), de modo que:

$$F_i = \begin{cases} f_k & \text{si el nodo i es parte del lado k} \\ & (k = 1,2,3,4) \\ 1 & \text{si el nodo i es parte del lado k} \end{cases} \tag{3.58}$$

Luego, la función asociada al nodo i, vendrá dada por:

$$\psi_i = \left[\prod_{j=1}^{4} F_j \right] (a_1 + a_2\xi + a_3\eta) \tag{3.59}$$

El número de constantes a determinar debe ser igual a las condiciones nodales disponibles, por lo que en algunos casos, el polinomio anterior deberá ser truncado para así satisfacer este requisito de igualdad. Una vez cumplido este requerimiento, los coeficientes a_i del polinomio anterior se determinan haciendo que $\psi_i = 1$ en el nodo i, y cero en todos los otros nodos que no estén incluidos en los términos del producto $\prod_{j=1}^{4} F_j$. Con la finalidad de ilustrar el procedimiento descrito, supóngase que se desea deducir las funciones de interpolación ψ_1 y ψ_6 del elemento serendipity rectangular cuadrático de ocho nodos de la Fig.3.20.

Para deducir la función ψ_1, en primer lugar se deben definir las funciones F_i (i=1,2,3,4) de la ec.(3.58). Como se puede apreciar en la Fig.3.21, el nodo 1 está en la intersección de los lados uno y cuatro y, por lo tanto, de la ec.(3.58) se tiene que: $F_1 = F_4 = 1$. Las otras funciones serán entonces: $F_2 = f_2 = (1-\xi)$ y $F_3 = f_3 = (1-\eta)$. Luego, la ec.(3.59) en este caso se transforma en:

$$\prod_{j=1}^{4} F_j = 1 \times (1-\xi)(1-\eta) \times 1$$

La ecuación general de la función ψ_1 es:

$$\psi_1 = (1-\xi)(1-\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)$$

El producto $(1-\xi)(1-\eta)$ hace que ψ_1 se anule en los nodos 2,3,4,6 y 7. Por lo tanto las constantes a_i (i=1,2,3), deben seleccionarse de tal modo que ψ_1 sea 1 en el nodo 1 y cero en los nodos 5 y 8; es decir:

En el nodo 1:

$$1 = (1+1)(1+1)(a_1 - a_2 - a_3)$$

En el nodo 5:

$$0 = (1-0)(1+1)(a_1 - a_3)$$

En el nodo 8:

$$0 = (1-0)(1+1)(a_1 - a_2)$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $a_1 = a_2 = a_3 = -1/4$, y la función ψ_1 viene dada entonces por:

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$

En la deducción de la función ψ_6 se debe observar que el nodo 6 está localizado en el medio del lado 1, y por lo tanto: $F_2 = 1$; $F_1 = f_1 = (1-\eta)$; $F_3 = f_3 = (1+\eta)$ y, además:

$$\prod_{j=1}^{4} F_j = (1-\eta) \times 1 \times (1+\eta)(1+\xi)$$

La ecuación general de la función ψ_6 es:

$$\psi_6 = (1+\xi)(1-\eta)(1+\eta)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta)$$

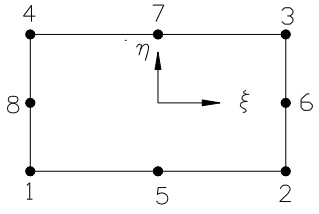
De nuevo se debe notar que el producto $(1+\xi)(1-\eta)(1+\eta)$ hace que la función ψ_6 se anule en los nodos 1,2,3,4,5,7 y 8 y, por lo tanto, solamente hay una condición nodal a verificar: $\psi_6 = 1$ en el nodo 6 $(\xi = 1; \eta = 0)$, lo cual quiere decir que se debe retener una sola constante en el polinomio de la ecuación anterior. Luego:

$$1 = (1+1)(1+0)(1-0)a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

Finalmente, la función ψ_6 viene dada por:

$$\psi_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

En la Fig.3.22 se resume las funciones de interpolación de este elemento.



$\Psi_1 = 1/4(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$ $\Psi_2 = 1/4/(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$

$\Psi_3 = 1/4(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$ $\Psi_4 = 1/4(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$

$\Psi_5 = 1/2(1-\xi^2)(1-\eta)$ $\Psi_6 = 1/2(1+\xi)(1-\eta^2)$

$\Psi_7 = 1/2(1-\xi^2)(1+\eta)$ $\Psi_8 = 1/2(1-\xi)(1-\eta^2)$

Fig.3.22 Elemento serendipìty cuadrático y funciones de interpolación asociadas.

El procedimiento descrito en esta sección puede ser aplicado a elementos de orden superior, como por ejemplo en el caso del elemento serendipity rectangular de doce nodos, que se muestra en la Fig.3.23.

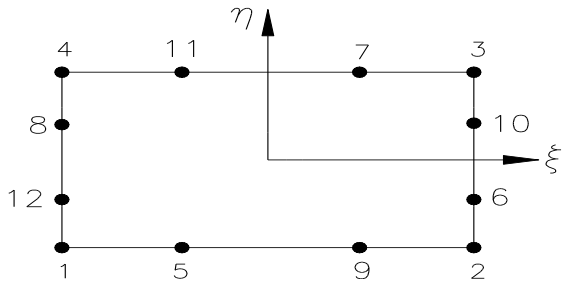


Fig.3.23 Elemento serendipity cúbico.

En este caso, el polinomio de aproximación para este elemento viene dado por:

$$u(\xi,\eta)=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta+a_5\xi^2+a_6\eta^2+a_7\xi^2\eta+a_8\xi\eta^2+$$

$$a_9\xi^3+a_{10}\eta^3+a_{11}\xi^3\eta+a_{12}\xi\eta^3 \qquad (3.60)$$

De igual modo que en el caso anterior, las funciones de interpolación de este elemento pueden escribirse como el producto de dos polinomios:

$$\psi_i(\xi,\eta)=(a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta)(a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\eta^2) \qquad (3.61)$$

Como ejemplo, supóngase que se desea determinar las funciones ψ_1 y ψ_5 de este elemento. En la deducción de la función ψ_1, obsérvese que el nodo 1 está en la intersección de los lados 1 y 4, luego: $F_1=F_4=1$, y las otras funciones son: $F_2=f_2=(1-\xi)$ y $F_3=f_3=(1-\eta)$. En este caso la ec.(3.58) se transforma en:

$$\prod_{j=1}^{4} F_j=1\times(1-\xi)(1-\eta)\times 1$$

este producto hace que ψ_1 sea cero en los nodos 2,3,4,6,7,10,11.Por lo tanto, las constantes a_i (i=1,2,3,4,5), deben seleccionarse de tal modo que $\psi_1=1$ en el nodo 1 y cero en los nodos 5,8,9 y 12. Así, la forma general de esta función es:

$$\psi_1=(1-\xi)(1-\eta)(a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\eta^2)$$

Entonces sustituyendo las condiciones:

Nodo	ξ	η	ψ
1	-1	-1	1
5	-1/3	-1	0
8	-1	-1/3	0
9	1/3	-1	0
12	-1	-1/3	0

en la ecuación anterior, se obtiene un sistema de ecuaciones, que permite determinar los valores de las constantes a_i. La solución de dicho sistema conduce a: $a_1 = -10/32$, $a_2 = a_3 = 0$ y $a_4 = a_5 = 9/32$. De modo que la función ψ_1 viene dada por:

$$\psi_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)\left[-10 + 9\left(\xi^2 + \eta^2\right)\right]$$

Para deducir la función ψ_5 nótese que el nodo 5 está situado sobre el lado 1 y, por lo tanto: $F_1 = 1$, $F_2 = f_2 = (1-\xi)$, $F_3 = f_3 = (1-\eta)$ y $F_4 = f_4 = (1+\xi)$. Luego:

$$\prod_{j=1}^{4} F_j = 1 \times (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi)$$

La ecuación general de la función ψ_5 es:

$$\psi_5 = (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi)\left(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2\right)$$

El producto $(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi)$ hace que ψ_5 sea cero en los nodos 1,2,3,4,6,7,8,10,11 y 12. En este caso, sólo hay dos condiciones nodales disponibles: $\psi_5 = 1$ en el nodo 5 $(\xi = -1/3; \eta = -1)$ y $\psi_5 = 0$ en el nodo 9 $(\xi = 1/3; \eta = -1)$. Los coeficientes a_4 y a_5 del polinomio anterior deben omitirse ya que de mantenerse producirían los términos ξ^4 o $\xi^2\eta^2$ ninguno de los cuales aparece en la ec.(3.60). Así mismo la retención del coeficiente $a_3\eta$ conduce a la formación de un sistema de ecuaciones singular, motivo por el cual también hay que eliminarlo. Con estas observaciones, la función ψ_5 queda reducida a:

$$\psi_5 = \left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(a_1 + a_2\xi)$$

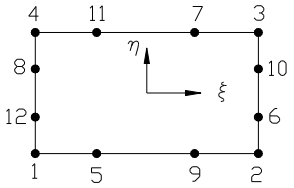
Sustituyendo las condiciones:

Nodo	ξ	η	ψ
5	-1/3	-1	1
9	1/3	-1	0

en la ecuación anterior, y resolver el sistema de ecuaciones resultante, se obtiene: $a_1 = 9/32$ y $a_2 = -27/32$. Luego , la función de aproximación ψ_5 viene dada por:

$$\psi_1 = \frac{9}{32}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)(1-3\xi)$$

En la Fig.3.24 se resume las funciones de interpolación del elemento serendipity cúbico.



$$\Psi_1 = 1/32(1-\xi)(1-\eta)[(-10+9(\xi^2+\eta^2)] \qquad \Psi_2 = 1/32(1+\xi)(1-\eta)[(-10+9(\xi^2+\eta^2)]$$

$$\Psi_3 = 1/32(1+\xi)(1+\eta)[(-10+9(\xi^2+\eta^2)] \qquad \Psi_4 = 1/32(1-\xi)(1+\eta)[(-10+9(\xi^2+\eta^2)]$$

$$\Psi_5 = 9/32(1-\xi^2)(1-\eta)(1-3\xi) \qquad \Psi_6 = 9/32(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta)$$

$$\Psi_7 = 9/32(1-\xi^2)(1+\eta)(1-3\xi) \qquad \Psi_8 = 9/32(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)$$

$$\Psi_9 = 9/32(1-\xi^2)(1-\eta)(1+3\xi) \qquad \Psi_{10} = 9/32(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta)$$

$$\Psi_{11} = 9/32(1-\xi^2)(1+\eta)(1-3\xi) \qquad \Psi_{12} = 9/32(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta)$$

Fig.3.24 Elemento serendipity cúbico y sus respectivas funciones de interpolación.

3.3.9.- Elementos isoparamétricos

En los dominios cuyas geometrías tienen contornos de forma irregular, la aproximación de éstos, mediante elementos de lados rectos, conduce a soluciones inadecuadas, a menos que en la discretización del dominio se emplee un gran número de este tipo de elementos. Sin embargo, esta forma de contornar el problema, produce un elevado número de grados de libertad, lo cual demanda un gran esfuerzo computacional. De modo que, si fuera posible disponer de elementos de lados curvos, con los cuales se pudiera modelar el contorno en forma más aproximada a la verdadera, la desventaja anterior dejaría de existir. Este razonamiento impulsó el desarrollo de elementos de lados curvos. Aparentemente fue I. C. Taig, en 1961, el primero en introducir elementos cuadráticos de lados curvos. Más tarde estas ideas fueron generalizadas, en 1966, por Irons y en 1968 por J. Ergatoudus et. al. La idea fundamental en el desarrollo de los elementos de lados curvos, consiste en transformar formas geométricas simples, referidas a un sistema local de coordenadas, en formas geométricas distorsionadas, en el sistema de coordenadas globales, y entonces evaluar las ecuaciones en los elementos curvos resultantes. Un ejemplo ayudará a clarificar estos conceptos. A efecto de la presentación, el ejemplo estará asociado al caso bidimensional, pero la extensión de los conceptos al caso tridimensional, es inmediata.

Supóngase que se desea representar un dominio referido al sistema coordenado X y Y mediante una malla de elementos cuadriláteros y triangulares de lados curvos , y además se desea que el campo de la variable ϕ tenga una variación cuadrática dentro de cada elemento. De acuerdo con lo establecido anteriormente, si se seleccionan los valores nodales de ϕ como los grados de libertad del problema, entonces se deben asociar tres nodos en cada lado del elemento. La aproximación del dominio puede ser, entonces, como se muestra en la Fig.3.25.

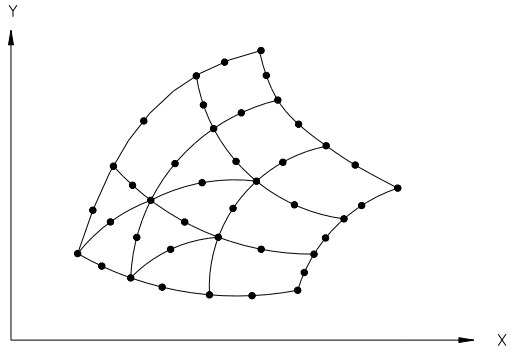


Fig.3.25 Dominio bidimensional modelado por elementos de lados curvos.

Se puede construir un elemento típico de esta malla a partir del elemento "patrón" de cada elemento, referido a su correspondiente sistema de coordenadas locales ξ y η, tal como se muestra en la Fig.3.26.

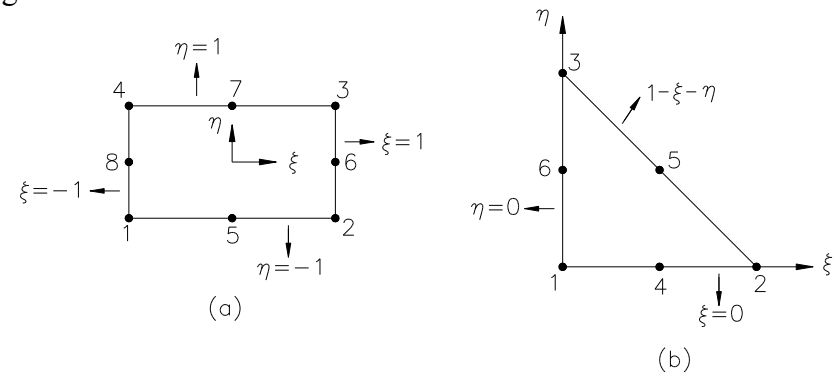


Fig.3.26 Elementos patrones referidos a sus respectivos sistemas de coordenadas locales; (a) elemento rectangular; (b) elemento triangular.

La variación de ϕ en el interior de cualquiera de los dos elementos, puede expresarse como:

$$\phi(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{r} \psi_i(\xi,\eta)\phi_i \tag{3.62}$$

donde r es el número de nodos en el elemento y ψ_i son las funciones de interpolación mostradas en la Fig.3.20.

Por otro lado, los nodos en el plano $\xi - \eta$ pueden transformarse en el plano x - y, a través de las siguientes relaciones:

$$x = \sum_{i=1}^{r} F_i(\xi,\eta)x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{r} F_i(\xi,\eta)y_i \tag{3.63}$$

En este ejemplo, las funciones de transformación $F_i(\xi,\eta)$ deben ser cuadráticas, puesto que los contornos curvos de los elementos en el plano x - y necesitan tres puntos para su única especificación, y además deberán ser igual a la unidad e igual a cero cuando sean evaluadas en los nodos, el plano $\xi - \eta$. Las funciones que cumplen con estos requisitos son, precisamente, las funciones de interpolación serendipity cuadráticas; es decir:

$$x = \sum_{i=1}^{r} \psi_i(\xi,\eta)x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^{r} \psi_i(\xi,\eta)y_i \tag{3.64}$$

donde ψ_i están dadas, de nuevo, por las ecuaciones de la Fig.3.22. El resultado de la transformación definida por la ec.(3.64) es un elemento cuadrático, de ocho nodos, de lados curvos, del tipo mostrado en la Fig.3.26. Para este elemento en particular, el campo de la variable y la representación de sus contornos están expresadas mediante funciones del mismo orden. Los elementos curvos formulados de este modo reciben el nombre de "isoparamétricos". En contraste

con estos elementos, se definen los elementos "subparamétricos" como aquellos cuya geometría se describe mediante polinomios de menor orden que los utilizados en la aproximación del campo de la variable, y los elementos "superparamétricos", como aquellos que cuya geometría se describe con polinomios de mayor orden que los utilizados en la aproximación del campo de la variable. De estas tres categorías, los elementos isoparamétricos son los más comúnmente usados, aun cuando algunas formas de elementos subparamétricos y superparamétricos son, algunas veces, usados en el análisis estructural de conchas. En esta sección sólo se presentarán elementos isoparamétricos.

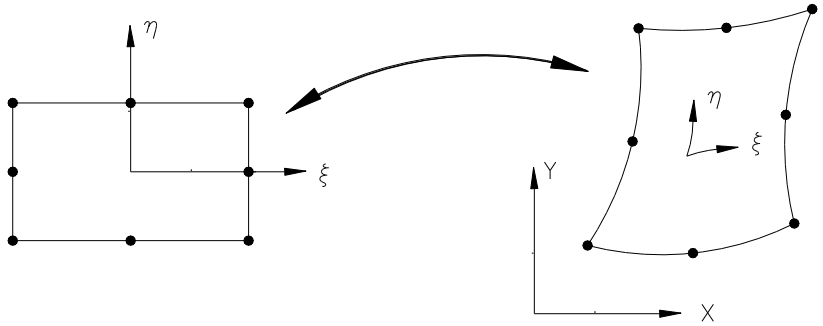


Fig.3.27 Elemento cuadrilátero de lados curvos resultante de la transformación del elemento rectangular patrón.

Cuando se establecieron las ecs.(3.64), se asumió que la transformación entre las coordenadas locales ξ, η y las coordenadas globales X y Y es única; es decir, se supone que cada punto en un sistema coordenado tiene un punto correspondiente en el otro sistema. Si la transformación no es única, se puede esperar una violenta e indeseable distorsión del elemento en el plano X , Y.

3.3.10.- Cálculo de las derivadas de las funciones de interpolación

Las ecuaciones que gobiernan la mayoría de los problemas que se presentan en la práctica, envuelven las derivadas de las funciones de forma con relación a X y Y (y a Z en el caso de problemas tridimensionales). La evaluación de dichas derivadas para el caso de elementos bidimensionales, sigue el mismo procedimiento que para el caso unidimensional, el cual fue descrito en la sección 2.1.

3.3.10.1.- Elementos triangulares

En el caso de elementos triangulares, la evaluación de las derivadas de las funciones de interpolación comenzará por seleccionar L_1 y L_2 como las coordenadas independientes. Ahora, la relación diferencial expresada por la ec.(3.18) viene dada por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_1}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_2} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_2} \qquad (3.65)$$

La matriz Jacobiana es:

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_1} & \dfrac{\partial y}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial L_2} & \dfrac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

luego,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.67}$$

y por lo tanto, las derivadas a determinar son:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \tag{3.68}$$

De este modo se podrá evaluar las derivadas deseadas ya que las funciones de interpolación de cualquier elemento de la familia de elementos triangulares lagrangeanos, siempre podrán re-escribirse en términos de L_1 y L_2.

3.3.10.2.- Ejemplo 3.3. Cálculo de las derivadas de las funciones de interpolación de un elemento triangular cuadrático

Sea el elemento triangular cuadrático mostrado en la Fig.e3.3.1. Se desea determinar las derivadas de las funciones de interpolación $\dfrac{\partial N_5}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial N_5}{\partial y}$ en el punto A(2,2).

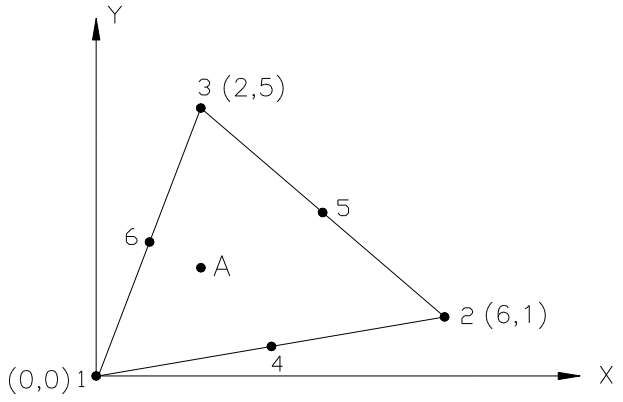


Fig.e3.3.1 Elemento triangular cuadrático.

De acuerdo con las ecs.(3.65):

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_1}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_1}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_1} \tag{a1}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial L_2}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial L_2}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial L_2} \tag{a2}$$

y además:

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \tag{b1}$$
$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \tag{b2}$$

es decir:

$$x = 6L_2 + 2L_3$$
$$y = L_2 + 5L_3$$

y por lo tanto:

$$x = 6L_2 + 2(1 - L_1 - L_2) \quad \Rightarrow \quad x = 2 - 2L_1 + 4L_2$$
$$y = L_2 + 5(1 - L_1 - L_2) \quad \Rightarrow \quad y = 5 - 5L_1 - 4L_2$$

de este modo:

$$\frac{\partial x}{\partial L_1} = -2 \qquad \frac{\partial y}{\partial L_1} = -5$$
$$\frac{\partial x}{\partial L_2} = 4 \qquad \frac{\partial y}{\partial L_2} = -4$$

De la ec.(3.66):

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1}\\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 4 & -4\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow [J]^{-1}=\frac{1}{28}\begin{bmatrix}-4 & 5\\ -4 & -2\end{bmatrix}$$

La función de interpolación N_5 es la misma $N_{011} = 4L_2L_3$ de la correspondiente ec.(3.37):

$$N_5 = 4L_2L_3 = 4L_2(1 - L_1 - L_2)$$
$$N_5 = 4L_2 - 4L_1L_2 - 4L_2^2$$

de donde:

$$\frac{\partial N_5}{\partial L_1} = -4L_2$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial L_2} = 4 - 4L_1 - 8L_2 = 4(1 - L_1 - L_2) - 4L_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial N_5}{\partial L_2} = 4(L_3 - L_2)$$

Finalmente, de la ec.(3.68):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_5}{\partial x} \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -4L_2 \\ 4(L_3 - L_2) \end{Bmatrix} = \frac{4}{28}\begin{Bmatrix} 4L_2 + 5(L_3 - L_2) \\ 4L_2 - 2(L_3 - L_2) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_5}{\partial x} \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{Bmatrix} -L_2 + 5L_3 \\ 2L_2 - 2L_3 \end{Bmatrix} =$$

En el punto A(2,2) se tiene:

$$2 = 0L_1 + 6L_2 + 2L_3$$
$$2 = 0L_1 + L_2 + 5L_3$$

La solución de este sistema de ecuaciones resulta:

$$L_2 = \frac{3}{14} \qquad\qquad L_3 = \frac{5}{14}$$

y la función L_1, se obtiene de:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad L_1 = \frac{3}{7}$$

Luego:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_5}{\partial x} \\ \frac{\partial N_5}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{Bmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{Bmatrix}$$

y

$$\frac{\partial N_5}{\partial x} = \frac{11}{49} \qquad\qquad \frac{\partial N_5}{\partial y} = -\frac{2}{49}$$

3.3.10.3.- Elementos rectangulares

La evaluación de las derivadas globales $\partial N_i/\partial x$ y $\partial N_i/\partial y$ para este tipo de elementos sigue los mismos pasos de la sección previa. Así, puesto que ahora las funciones de interpolación vienen expresadas en términos de las coordenadas locales ξ y η, se tiene:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{3.69}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.70}$$

en cada elemento. Finalmente las derivadas $\partial N_i/\partial x$ y $\partial N_i/\partial y$ se obtienen haciendo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} J_{11}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \\ J_{21}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.71}$$

donde:

$$[J]^{-1} = [J^*] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

3.3.10.4.- Ejemplo 3.4. Cálculo de las derivadas de las funciones de interpolación en un elemento isoparamétrico lineal de cuatro nodos

Sea el elemento isoparamétrico lineal de cuatro nodos mostrado en la Fig.e3.4.1. Se desea determinar $\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}$ y $\frac{\partial \Psi_2}{\partial y}$ en el punto A(1/2,1/2).

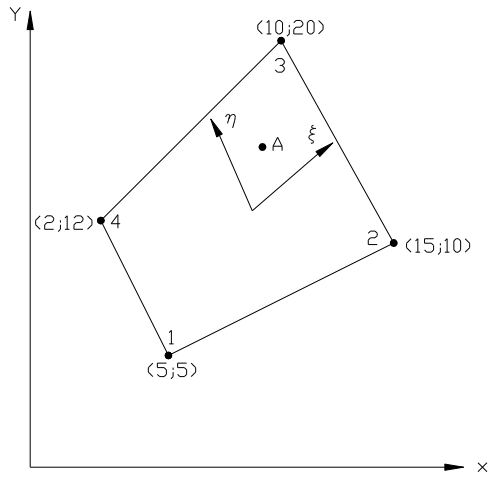


Fig.e3.4.1 Elemento isoparamétrico lineal.

De acuerdo con la ec.(3.70), el jacobiano de la transformación viene dado por:

$$[J]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta)\\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Sustituyendo los valores de ξ y η se obtiene:

$$[J]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2 & 3/2 & -3/2\\ -1/2 & -3/2 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 5\\ 15 & 10\\ 10 & 20\\ 2 & 12\end{bmatrix}$$

$$[J]=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3 & -3\\ -1 & -3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 5\\ 15 & 10\\ 10 & 20\\ 2 & 12\end{bmatrix}$$

$$[J]=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}34 & 29\\ -18 & 37\end{bmatrix}$$

La inversa del Jacobiano es:

$$[J]^{-1}=\frac{1}{1870}\begin{bmatrix}37 & -29\\ 18 & 34\end{bmatrix}$$

La función de interpolación Ψ_2 es:

$$\Psi_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) \qquad\qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi)$$

En el punto $A(1/2;1/2)$ se tiene:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \qquad\qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

y, finalmente:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{3}{1780} \begin{bmatrix} 37 & -29 \\ 18 & 34 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1780} \begin{Bmatrix} 124 \\ -84 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{124}{1780} \\ -\frac{84}{1780} \end{Bmatrix}$$

3.3.11.- Integración numérica

En general, los coeficientes de las matrices de "rigidez" de los problemas de interés práctico, vienen dadas por ecuaciones del siguiente tipo:

$$k_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega_e} \left(a \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + b \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dxdy \tag{3.73}$$

Donde, usualmente, $a = a(x,y)$ y $b = b(x,y)$.

Cuando se utilizan elementos cuya forma se describe por ecuaciones análogas a las ecs.(3.64), y puesto que la función ϕ es una función de las coordenadas locales ξ y η [ec.(3.62)], es necesario expresar, también, $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ y dxdy, en términos de ξ y η, lo cual se logra mediante las ecuaciones similares a las ecs.(3.68) y (3.71). De igual modo, es fácil mostrar que:

$$dxdy = |J| \, d\xi d\eta \tag{3.74}$$

Con estas transformaciones, las integrales similares a la expresada en la ec.(3.62) se reduce a la forma:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} F(\xi,\eta)|J|\,d\xi d\eta \tag{3.75}$$

donde F es la función transformada del integrando. A pesar que los límites de integración son ahora muy simples (los límites del elemento referido al sistema local $-1<\xi<1$ y $-1<\eta<1$), el integrando transformado, no es una función simple que pueda ser integrada en forma cerrada. En efecto, sustituyendo la ec.(3.71) y la ec.(3.75) en la ec.(3.73), se obtiene:

$$\overset{(e)}{k}_{ij} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\hat{a}\left(J_{11}^{*}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial\psi_i}{\partial\eta}\right)\left(J_{11}^{*}\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial\psi_j}{\partial\eta}\right)+\right.$$

$$\left.\hat{b}\left(J_{21}^{*}\frac{\partial\psi_i}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial\psi_i}{\partial\eta}\right)\left(J_{21}^{*}\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial\psi_j}{\partial\eta}\right)\right]|J|\,d\xi\,d\eta$$

$$=\iint_{\hat{\Omega}_e} F(\xi,\eta)|J|\,d\xi d\eta \tag{3.76}$$

Las integrales presentes en la ecuación anterior, ciertamente, son difíciles de evaluar en forma exacta, por lo tanto deberá serlo en forma numérica, lo cual por otra parte, no representa mayor dificultad.

3.3.11.1.- Cuadratura numérica sobre un elemento triangular patrón

En la sección 3.7 se mostró que los elementos isoparamétricos cuadriláteros pueden usarse, tanto para aproximar el campo de las variables involucradas en un problema dado, como también para modelar geometrías arbitrarias. Puesto que dichos elementos pueden ser geométricamente distorsionados, es posible distorsionar un elemento cuadrilátero en un elemento triangular, moviendo la posición de los nodos de las esquinas de dicho elemento (y el cuarto nodo, de una de las esquinas del elemento cuadrilátero, hacerlo coincidir con uno de los nodos vecinos). En términos computacionales, lo anterior equivale a asignar un mismo número, de la numeración global de los nodos, a dos nodos situados en las esquinas del cuadrilátero. Luego los elementos triangulares, referidos al sistema local de referencia (elemento patrones), pueden obtenerse, de una forma natural, a partir de los elementos patrones rectangulares, del tipo mostrado en la Fig.3.17.

En la Fig.3.23 se muestra un triángulo isósceles recto, $\left(\hat{\Omega}_e\right)$, el cual se seleccionará como elemento patrón. A partir de este elemento se podrá generar un elemento triangular arbitrario, $\left(\Omega_e\right)$, a partir de una transformación similar a la dada por la ec.(3.64). Las lados del elemento patrón definidos por $\xi=0$ y $\eta=0$ en $\hat{\Omega}_e$, corresponden a los lados curvos 1-3 y 1-2 en Ω_e. En general, las integrales sobre $\hat{\Omega}_e$ tienen la forma:

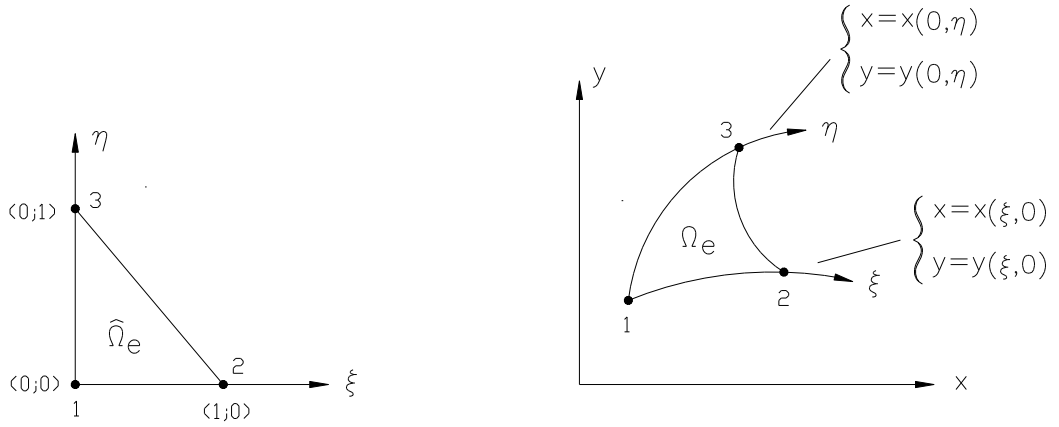


Fig.3.23 Transformación de un elemento patrón $\hat{\Omega}_e$ en un elemento arbitrario Ω_e.

$$\iint_{\hat{\Omega}_e} G(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \iint_{\hat{\Omega}_e} \hat{G}(L_1, L_2, L_3)\,dL_1\,dL_2 \tag{3.77}$$

Esta integral puede aproximarse mediante la fórmula de cuadratura numérica $(L_3 = 1 - L_1 - L_2)$:

$$\iint_{\hat{\Omega}_e} \hat{G}(L_1, L_2, L_3)\,dL_1\,dL_2 \approx \frac{1}{2}\sum_{I=1}^{N} W_I\,\hat{G}(S_I) \tag{3.78}$$

donde W_I y S_I son los pesos y los puntos de integración de la cuadratura, respectivamente. La Tabla 3.1 contiene la información de la cuadratura de uno, dos y tres puntos de integración para elementos triangulares.

3.3.11.2.- Cuadratura numérica sobre un elemento rectangular patrón

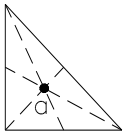
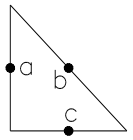
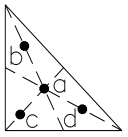
Las fórmulas de cuadratura numérica de las integrales definidas sobre un elemento rectangular patrón, $\hat{\Omega}_e$, tal como los mostrados en la Fig.3.17 se pueden deducir a partir de las fórmulas de cuadratura para el caso unidimensional. En efecto, considérese alguno de los elementos unidimensionales mostrados en la Fig.3.3. En estos elementos, en general, los coeficientes de la matriz de "rigidez", podrán determinarse, a nivel de cada elemento patrón $\hat{\Omega}_e$, mediante la siguiente expresión:

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \hat{F}(\xi)\,d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{F}(\xi_i) \tag{3.79}$$

donde, de nuevo, w_i son los factores de pesos, ξ_i son los puntos base [raíces del polinomio de Legendre $P_{n+1}(\xi)$], y $\hat{F}$ es el integrando transformado al sistema coordenado natural:

$$\hat{F}(\xi) = F[x(\xi)] \times J(\xi) \tag{3.80}$$

Tabla 3.1 Pesos y Puntos para la cuadratura numérica de elementos triangulares.

Núm. de puntos de integración	L_1	L_2	L_3	W	Localización geométrica.
1	1/3	1/3	1/3	1	
3	1/2 1/2 0	0 1/2 1/2	1/2 0 1/2	1/3 1/3 1/3	
4	1/3 2/15 11/15 2/15	1/3 2/15 2/15 11/15	1/3 11/15 2/15 2/15	27/48 25/48 25/48 25/48	

En la Tabla 3.2 se presentan los factores de peso y los puntos base (de Gauss) de la cuadratura de Gauss_Legendre.

Estos resultados pueden extenderse, directamente, al caso bidimensional. En efecto, en este caso, las integrales, a nivel de cada elemento rectangular patrón vienen dadas por:

$$\iint_{\hat{\Omega}_e} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \int_{-1}^{+1}\left[\int_{-1}^{+1} F(\xi,\eta)\,d\eta\right]d\xi = \int_{-1}^{+1}\left[\sum_{j=1}^{n} F(\xi,\eta_j)\,w_j\right]d\xi$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F(\xi_i,\eta_j)\,w_i\,w_j \qquad (3.81)$$

donde m y n representan el número de puntos de la cuadratura en las direcciones ξ y η, respectivamente, (ξ_i,η_j) son los puntos de Gauss, y w_i y w_j son los correspondientes factores de pesos. En la Tabla 3.3 se presenta los puntos de Gauss y factores de peso asociados de diferentes elementos rectangulares.

Tabla 3.2 Pesos y Puntos de Gauss de la cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^{+1} \hat{F}(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{F}(\xi_i)$$

Puntos ξ_i	n	Pesos w_i
0.0000000000	Un punto de integración	2.0000000000
± 0.5773502692	Dos puntos de integración	1.0000000000
0.0000000000 ± 0.7745966692	Tres puntos de integración	0.8888888889 0.5555555555
± 0.3399810435 ± 0.8611363116	Cuatro puntos de integración	0.6521451548 0.3478548451
0.0000000000 ± 0.5384693101 ± 0.9061798459	Cinco puntos de integración	0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850
± 0.2386191861 ± 0.6612093865 ±0.9324695142	Seis puntos de integración	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

IV.- FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

4.1.- Introducción

En el Capítulo II, las ecuaciones de los elementos se dedujeron usando el método directo. Como ya se mencionó, este método, a pesar que muestra claramente el esquema de funcionamiento del **mef**, y utiliza únicamente conceptos básicos de la ingeniería, resulta prácticamente imposible de aplicar a aquellos problemas con geometría y estados de cargas complejos. Una forma de contornar estas dificultades, consiste en interpretar el **mef** como un método aproximado para resolver problemas expresados en forma variacional. De hecho, la mayoría de las soluciones de problemas de ingeniería reportadas en la literatura, están basadas en este tipo de aproximación. En este Capítulo, se presentará la deducción de las ecuaciones de los elementos usando el enfoque variacional.

Con la finalidad de presentar la formulación variacional del **mef**, se hace necesario el conocimiento de las bases del cálculo variacional, de modo que, en este Capítulo, se incluye una muy breve introducción de dicho cálculo.

4.2.- El problema de brachistochrone

Históricamente, el cálculo variacional se consolidó como una disciplina independiente de las matemáticas al comienzo del siglo dieciocho. La mayoría de las formulaciones en esta área de las matemáticas fueron desarrolladas por el matemático suizo Leonhard Euler. A manera de ejemplo se presentará a continuación, uno de los problemas que ocuparon la atención de los principales matemáticos de los siglos diecisiete y dieciocho.

Un problema discutido originalmente por Galileo Galilei en sus *Dialogues*, y más tarde resuelto por diferentes métodos (tanto intuitivos como geométricos) y eminentes matemáticos (John y James Bernoulli, L'Hospital, Leibnitz, Newton), consistió en determinar la trayectoria que una partícula de masa *m*, debe recorrer, en un plano vertical, deslizándose sin fricción bajo la acción de un campo gravitacional constante, de manera que iniciando el movimiento en el punto $P_1(x_1, y_1)$, pase al punto $P_2(x_2, y_2)$ en el tiempo mínimo, tal como se muestra en la Fig.4.1.

Se podría pensar que el movimiento más rápido de la partícula, ocurre a lo largo de la línea recta que une los dos puntos, pero ya Galileo apuntaba que algunas otras curvas proporcionarían un tiempo menor que esta hipotética solución. En 1696, John Bernoulli propuso a sus estudiantes el reto de resolver dicho problema, y denominó *brachistochrone* ($\beta\rho\alpha\chi\acute{\iota}\sigma\tau o\zeta$ = mínimo , $\chi\rho o\nu\acute{o}\zeta$ = tiempo), a la curva solución del problema, que es la curva llamada cicloide.

El funcional que gobierna este problema se obtiene de la siguiente manera: el tiempo T requerido para que la partícula se mueva desde el punto P_1 punto P_2 a lo largo de la curva γ, viene dado por la integral de línea:

$$T = \int_0^T dt = \int_\gamma \frac{ds}{v} \tag{4.1}$$

donde s representa la longitud del arco a lo largo de γ, ds/v es la tasa de cambio de la longitud del arco con relación al tiempo t, y la velocidad del movimiento es: $v = ds/dt$.

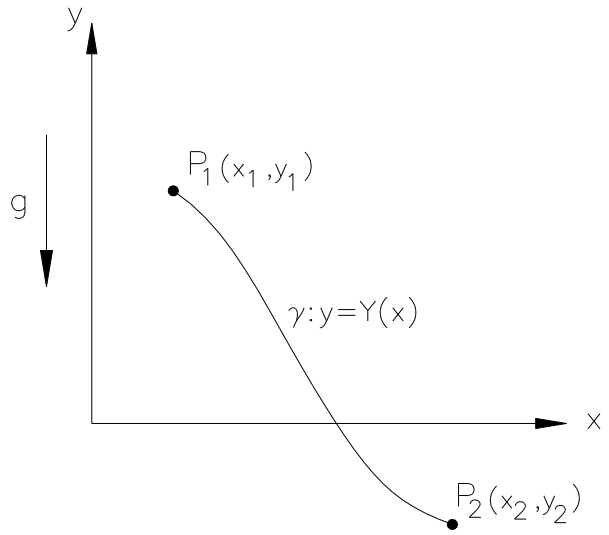


Fig.4.1 Trayectoria de una partícula en el problema de brachistochrone.

Luego, la partícula localizada en la posición genérica (x,y) y deslizándose a lo largo de γ, bajo la acción de la fuerza de la gravedad g (suponiendo que $y_1 > y_2$), tendrá una energía cinética de movimiento (E_C) dada por:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

y, una energía potencial (E_P) igual a:

$$E_P = mgy$$

La conservación de la energía requiere que la suma de ambas energías permanezca constante durante el movimiento, de tal modo que si la partícula comienza en reposo en el punto P_1, con energía cinética inicial nula y energía potencial igual a mgy_1, durante el movimiento se debe verificar la siguiente relación:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgy = mgy_1 \tag{4.2}$$

La curva γ puede representarse, en forma paramétrica, como:

$$\gamma: y = Y(x) \ , \ x_1 \le x \le x_2$$

siendo $Y(x)$ alguna función que relacione x con y a lo largo de γ.Entonces de la ec.(4.2) se puede obtener la velocidad de la partícula a lo largo de γ; es decir:

$$v = \sqrt{2g[y_1 - Y(x)]} \tag{4.3}$$

mientras que el elemento diferencial de la longitud del arco a lo largo de γ vendrá dado por:

$$ds = \sqrt{1 + Y_x(x)^2}\, dx \tag{4.4}$$

donde $Y_x(x) = \dfrac{dY(x)}{dx}$. Sustituyendo las ecs.(4.3) y (4.4) en la ec.(4.1), se obtiene:

$$\int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_{x1}^{x2} \sqrt{\frac{1 + Y_x(x)^2}{2g[y_1 - Y(x)]}}\, dx \tag{4.5}$$

Esta ecuación puede entonces considerarse como un funcional de dominio D, dado por el conjunto de todas las funciones $Y = Y(x)$, con primera derivada continua sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, que satisfacen las condiciones de contorno $Y(x_1) = y_1$ y $Y(x_2) = y_2$. El valor $T = T(Y)$ del funcional del problema de brachistochrone es entonces:

$$T(Y) = \int_{x1}^{x2} \sqrt{\frac{1 + Y_x(x)^2}{2g[y_1 - Y(x)]}}\, dx \tag{4.6}$$

para cualquier Y en $D = D(T)$.

4.3.- La primera variación de un funcional

Considérese inicialmente un problema unidimensional, descrito por una variable dependiente y(x), donde x es la coordenada espacial. El problema fundamental en el cálculo variacional consiste en determinar el valor de y(x) que hace estacionaria la siguiente expresión:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_x, y_{xx})\, dx \tag{4.7}$$

donde $y_x = dy/dx$, $y_{xx} = d^2y/dx^2$,etc. En general, se desea determinar la función y(x) que hace estacionario a I, y satisface ciertas condiciones de contorno. Al rango de funciones que satisfacen las condiciones de contorno, se les conoce como "funciones admisibles", y una de ellas hace estacionario a I.

Supóngase que el funcional dado por la ec.(4.7) tiene asociadas las siguientes condiciones de contorno: $y_1 = y(x_1)$ en $x = x_1$ y $y_2 = y(x_2)$ en $x = x_2$, y sea $\tilde{y}(x)$ una de estas funciones admisibles. Luego, cualquier solución aproximada $\tilde{y}(x)$, en la vecindad de la solución exacta y(x), puede expresarse como:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x) \tag{4.8}$$

tal como se ilustra en la Fig.4.2.

La variación de y(x), $\delta y(x)$, se define como un cambio arbitrario infinitesimal en y(x) para un valor fijo de la variable x; es decir, para $\delta x = 0$. El operador δ es llamado *operador*

variacional, y puede representarse gráficamente tal como se muestra en la Fig.4.3. Nótese que para la posición x mostrada, el incremento a-b puede considerarse como δy ; es decir, como una variación de y.

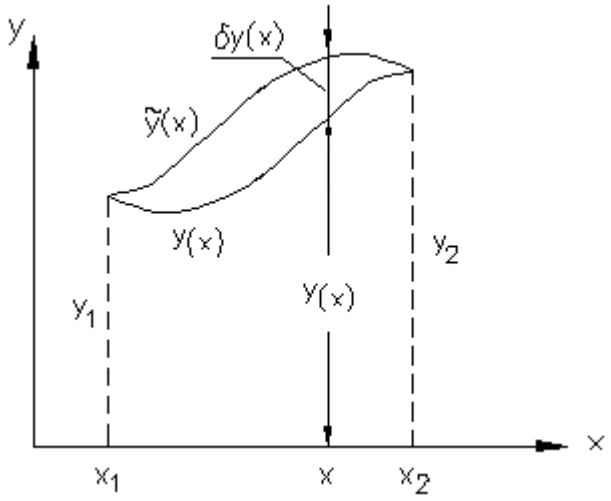


Fig.4.2 Representación gráfica de la variación de y(x).

Por otro lado, obsérvese que no existe un δx asociado con un δy . Esta condición contrasta con el proceso de diferenciación en el cual, cualquier dy está asociado con un dx. Se puede entonces decir que δy es, simplemente, la distancia vertical entre dos puntos de diferentes curvas, para un valor de x dado, mientras que dy es la distancia vertical entre dos puntos de la misma curva, separados una distancia dx, tal como se muestra, también, en la misma figura.

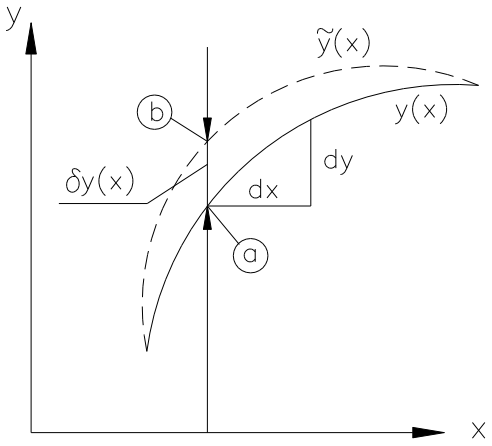


Fig.4.3 Representación gráfica de la diferencia entre δ_y y dy.

Se puede generalizar la idea anterior diciendo que el operador δ representa un pequeño cambio (infinitesimal), de una función, donde la variable independiente permanece fija, por lo que es posible obtener la variación de la función dy/dx . Luego, puesto que $\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$, la variación de dy/dx vendrá dada por:

$$\delta\left[\frac{dy}{dx}\right]=\left(\frac{d\tilde{y}}{dx}\right)-\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\tilde{y}-y)=\frac{d(\delta y)}{dx} \tag{4.9}$$

Como una consecuencia de la ecuación anterior, se concluye que el operador δ es conmutativo con el operador diferencial; es decir:

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\delta y) \tag{4.10}$$

De forma similar, se puede mostrar que el operador variacional también es conmutativo con el operador integral; es decir:

$$\delta\left(\int F dx\right)=\int(\delta F)dx \tag{4.11}$$

De igual modo, se define la variación de un funcional de forma análoga a la diferenciación total en el cálculo diferencial; es decir:

$$\delta I=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y_x+\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_{xx}+\frac{\partial F}{\partial x}\delta x \tag{4.12}$$

El último término es igual a cero ya que la ecuación anterior representa la variación de F para un valor fijo de x, siendo por lo tanto, $\delta x=0$.

Considérese ahora la variación de I, δI, correspondiente a las variaciones en la solución δy de la ec.(4.7). En analogía con el cálculo diferencial, la condición necesaria para que el funcional sea estacionario, es que la primera variación de I sea igual a cero; es decir:

$$\delta I=\int_{x1}^{x2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y_x+\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_{xx}\right)dx=0 \tag{4.13}$$

Integrando por partes los dos últimos dos términos de la ecuación anterior, se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y_x dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_x}\frac{d}{dx}(\delta y)dx$$

$$=\left|\frac{\partial F}{\partial y_x}\delta y\right|_{x1}^{x2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y\,dx$$

y

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_{xx}dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\frac{d}{dx}(\delta y_x)dx=\left|\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_x\right|_{x1}^{x2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\delta y_x\,dx$$

Integrando, de nuevo, por partes el último término de la ecuación anterior:

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\delta y_x\,dx=\left|\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_x\right|_{x1}^{x2}-\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\delta y\right|_{x1}^{x2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\delta y\,dx$$

y por lo tanto:

$$\delta I=\int_{x1}^{x2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_x}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\right]\delta y\,dx\;+$$

$$\left|\left[\frac{\partial F}{\partial y_x}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\right]\delta y\right|_{x1}^{x2}+\left|\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_x\right|_{x1}^{x2}=0 \qquad (4.14)$$

puesto que δy es arbitraria, cada término de la ecuación anterior debe, individualmente, ser igual a cero, luego:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_x}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right) \qquad (4.15a)$$

$$\left|\left[\frac{\partial F}{\partial y_x}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\right]\delta y\right|_{x1}^{x2}=0 \qquad (4.15.b)$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\delta y_x\right|_{x1}^{x2}=0 \qquad (4.15.c)$$

La ec.(4.15.a) es la ecuación diferencial que gobierna el expresado mediante el funcional dado por la ec.(4.7), y es llamada la ecuación de Euler o Euler-Lagrange. Las ecs.(4.15.b) y (4.15.c) representan las condiciones de contorno del problema.

Las condiciones de contorno:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y_x}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right)\right|_{x1}^{x2}=0 \qquad (4.16.a)$$

y

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y_{xx}}\right|_{x1}^{x2}=0 \qquad (4.16.b)$$

son las llamadas *condiciones naturales de contorno.* Si estas condiciones no se satisfacen, entonces se deberá verificar:

$$\delta y(x_1) = 0 \qquad ; \qquad \delta y(x_2) = 0 \tag{4.17.a}$$

y

$$\delta y_x(x_1) = 0 \qquad ; \qquad \delta y_x(x_2) = 0 \tag{4.17.b}$$

para que las ecs.(4.15.b) y (4.15.c) se satisfagan. Las ecs.(4.17) se denominan condiciones de contorno *geométricas, esenciales*, o condiciones de contorno *forzadas.* Es importante destacar que las condiciones de contorno (4.15.b) y (4.15.c) pueden satisfacerse mediante cualquier combinación de las condiciones de contorno libres y forzadas.

4.4.- Funcionales con varias variables dependientes

En la mayoría de los problemas de ingeniería aparecen varias variables dependientes. Por simplicidad se considerarán únicamente dos (p.e., f y g). El funcional será del tipo:

$$I(f,g) = \int_{x1}^{x2} F(x, f, g, f_x, g_x)\, dx \tag{4.18}$$

con las condiciones de contorno, $f(x_1) = f_1$, $g(x_1) = g_1$ y $f(x_2) = f_2$, $g(x_2) = g_2$, dadas. En este caso se tendrá que:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \delta f \qquad \text{y} \qquad \tilde{g}(x) = g(x) + \delta g$$

De modo análogo al caso anterior, la primera variación del funcional de la ec.(4.18) será:

$$\delta I = \int_{x1}^{x2} \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f_x + \frac{\partial F}{\partial g}\delta g + \frac{\partial F}{\partial g_x}\delta g_x \right) dx = 0 \tag{4.19}$$

Integrando por partes los términos que contienen δf_x y δg_x, se llega a:

$$\delta I = \int_{x1}^{x2} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x} \right) \right] \delta f + \left[\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial g_x} \right) \right] \delta g \right\} dx + \left| \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f \right|_{x1}^{x2} + \left| \frac{\partial F}{\partial g_x}\delta g \right|_{x1}^{x2} \tag{4.20}$$

Los dos últimos términos de esta ecuación son nulos en el contorno, y puesto que δf y δg son arbitrarias en el dominio, los términos que multiplican a δf y a δg también deben ser nulos. Así, en este caso se obtienen dos ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x} \right) = 0 \tag{4.21.a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial g_x} \right) = 0 \tag{4.21.b}$$

Si existen más variables dependientes, se obtendrá otras ecuaciones, una por cada variable dependiente.

4.5.- Funcionales con varias variables independientes

Existe también la posibilidad que el funcional dependa de dos o más variables independientes. El caso mas simple es:

$$I=\iint_{\Omega} F\left(x, y, f, f_x, f_y\right)dx\,dy \tag{4.22}$$

En la Fig.4.4 se muestra una región de dominio D y contorno S. Las condiciones de contorno de este tipo de problemas, deben establecer que la función f debe ser igual a un cierto valor sobre el contorno. Ahora se tendrá:

$$\tilde{f}\left(x, y\right)=f\left(x, y\right)+\delta f\left(x, y\right)$$

Luego:

$$\tilde{f}_x\left(x, y\right)=f_x\left(x, y\right)+\delta f_x\left(x, y\right)$$

$$\tilde{f}_y\left(x, y\right)=f_y\left(x, y\right)+\delta f_y\left(x, y\right)$$

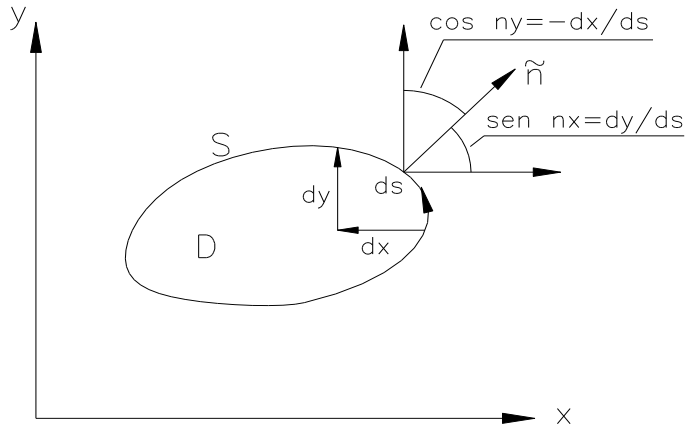


Fig.4.4 Definición del dominio D y del contorno S.

y por lo tanto,

$$\delta I=\iint_{D}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f+\frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f_x+\frac{\partial F}{\partial f_y}\delta f_y\right)dxdy=0 \tag{4.23}$$

Integrando por partes (Teorema de Green en el plano[1]), el segundo y tercer término de la ecuación anterior, se obtiene:

---

[1] $\iint_A \frac{\partial H}{\partial x} G\,dA=-\iint_A \frac{\partial G}{\partial x} H\,dA+\oint_S H G\,n_x\,ds$, donde $n_x=\frac{dy}{ds}$ es el coseno director.

$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f_x\,dx\,dy = -\iint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right)\delta f\,dx\,dy + \oint_S \frac{\partial F}{\partial f_x}\,\delta f\,\frac{dy}{ds}\,ds \tag{4.24.a}$$

$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial f_y}\delta f_y\,dx\,dy = -\iint \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right)\delta f\,dx\,dy - \oint_S \frac{\partial F}{\partial f_y}\,\delta f\,\frac{dx}{ds}\,ds \tag{4.24.b}$$

Luego, sustituyendo estas ecuaciones en la ec.(4.23), se obtiene:

$$\delta I = \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right)\right]\delta f\,dx dy + \oint_S \left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{df_y}\frac{dx}{ds}\right)\partial f\,ds = 0 \tag{4.25}$$

La integral sobre S es cero ya que δf es cero sobre el contorno. Por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange, en este caso viene dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right) = 0 \tag{4.26}$$

De forma similar se trata un funcional que contenga derivadas de orden superior. Considérese por ejemplo, el siguiente funcional:

$$\iint_D F\left(x, y, f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}\right) dx\,dy \tag{4.27}$$

con las condiciones de contorno especificadas para f, f_x, f_y sobre el contorno S. El lector podrá verificar que la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange viene dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f_{xx}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x \partial f_y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f_{yy}}\right) = 0 \tag{4.28}$$

4.6.- Funcionales con varias variables dependientes y varias variables independientes

Finalmente se considerará el caso de funcionales con varias variables dependientes y varias variables independientes. Estos son los funcionales que aparecen en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Por facilidad en la presentación, se supondrá un funcional con dos variables dependientes y dos variables independientes, tal como:

$$I = \iint_D F\left(x, y, f, f_x, f_y, g, g_x, g_y\right) dx\,dy \tag{4.29}$$

Ahora se deberá tener:

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y) + \partial f(x,y)$$

y

$$\tilde{g}(x,y) = g(x,y) + \partial g(x,y)$$

y por lo tanto:

$$\tilde{f}_x(x,y) = f_x(x,y) + \partial f_x(x,y) \qquad \tilde{f}_y(x,y) = f_y(x,y) + \partial f_y(x,y)$$

$$\tilde{g}_x(x,y) = g_x(x,y) + \partial g_x(x,y) \qquad \tilde{g}_y(x,y) = g_y(x,y) + \partial g_y(x,y)$$

Luego:

$$\delta I = \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f_x + \frac{\partial F}{\partial f_y}\delta f_y + \frac{\partial F}{\partial g}\delta g + \frac{\partial F}{\partial g_x}\delta g_x + \frac{\partial F}{\partial g_y}\delta g_y \right) dx\, dy = 0 \tag{4.30}$$

Después de la integración por partes de los términos $\delta f_x, \delta f_y, \delta g_x, \delta g_y$ se llega:

$$\delta I = \iint_D \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y} \right) \right] \delta f + \left[\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial g_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial g_y} \right) \right] \delta g \right\} dx dy$$

$$+ \oint_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{df_y}\frac{dx}{ds} \right) \delta f + \left(\frac{\partial F}{\partial g_x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial F}{dg_y}\frac{dx}{ds} \right) \right] \delta g\, ds = 0 \tag{4.31}$$

La integral sobre el contorno es cero y las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y} \right) = 0 \tag{4.32.a}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial g_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial g_y} \right) = 0 \tag{4.32.b}$$

4.7.- El método de Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz (o simplemente el método de Ritz), es un método numérico mediante el cual se puede obtener soluciones aproximadas de los problemas que puedan ser expresados en forma variacional. Dicho método consiste en asumir que la función a determinar, puede aproximarse mediante una combinación lineal de funciones convenientemente seleccionadas.

El grado de la aproximación dependerá de la adecuada selección de estas funciones. En muchos problemas de ingeniería, la forma de dichas funciones se conoce razonablemente bien y

el método, en estos casos, conduce a la solución exacta de dichos problemas. En general, una solución obtenida por el método de Ritz, puede mejorarse aumentando el número de términos utilizados en la función de aproximación. Para ilustrar este método, considérese el problema de determinar la función y(x), la cual corresponde al valor estacionario del funcional:

$$I = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y_x)\,dx \tag{4.33}$$

con las condiciones de contorno: $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

Se supone, entonces, que la solución puede aproximarse por una serie de funciones que satisfacen las condiciones de contorno especificadas, de la forma:

$$y(x) \cong \tilde{y}_n(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots\cdots + c_n\phi_n(x) \tag{4.34}$$

donde los c_i son parámetros a determinar y ϕ_i son funciones conocidas de x. Si k es el orden de la mayor derivada presente en el funcional, las funciones ϕ_i deben ser continuas hasta el orden $k-1$. Adicionalmente, se supone que cada una de estas funciones satisface las condiciones esenciales de contorno en forma exacta; es decir, en el caso del funcional de la ec.(4.33):

$$\phi_i(x_1) = \phi_i(x_2) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots\ldots,n) \tag{4.35}$$

Cuando se aproxima y(x) por $\tilde{y}_n(x)$, el funcional pasa a ser una función de los c_i. Luego, el problema se transforma en determinar el valor estacionario de una función de un número finito de parámetros c_i (i.e., un problema ordinario del cálculo diferencial), los cuales se determinan de las condiciones:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \qquad (i=1,2,....,n) \tag{4.36}$$

obteniéndose, por lo tanto, un sistema de ecuaciones algebraico simultáneo, donde los c_i son las incógnitas.

Cuando el método de Ritz se aplica a un funcional dado, se puede tener una medida de su convergencia comparando los valores sucesivos que se obtienen del funcional a través de una secuencia, para este caso, del tipo:

$$\begin{aligned}
&y_1^{(1)} = c_1^{(1)}\phi_1(x) \\
&y_2^{(2)} = c_1^{(2)}\phi_1(x) + c_2^{(2)}\phi_2(x) \\
&\text{- - - - - - - - - - - - - - - - -} \\
&y_i^{(i)} = c_1^{(i)}\phi_1(x) + c_2^{(i)}\phi_2(x) + \cdots\cdots + c_i^{(i)}\phi_i(x)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

donde la i-ésima expansión incluye todas las funciones contenidas en las expansiones previas.

En aquellos problemas donde las condiciones de contorno no son homogeneas, es mas conveniente seleccionar una serie de la forma:

$$y(x) \cong \tilde{y}_n(x) = \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots\cdots + c_n\varphi_n(x) \tag{4.38}$$

En esta serie, $\varphi_0(x)$ se selecciona de tal modo que satisfaga, exactamente, las condiciones de contorno no-homogéneas, mientras que las restantes φ_i se seleccionan, igual que antes, para que satisfagan las condiciones esenciales de contorno.

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento general de aplicación del método de Ritz a un funcional dado.

4.7.1.- Ejemplo 4.1. Ejemplo de aplicación del método de Ritz

Supóngase, entonces, que se desea determinar, a través del método de Ritz, una aproximación que haga estacionario el siguiente funcional:

$$I = \int_0^1 \left(y_x{}^2 - y^2 - 2x^2 y\right) dx \tag{a}$$

sujeto a las condiciones de contorno: $y(0) = y(1) = 0$. Un polinomio que satisface estas condiciones de contorno es:

$$\tilde{y}_n = x(1-x)\sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} \tag{b}$$

Como una primera aproximación, se seleccionará un sólo término de la expresión anterior. Luego:

$$\tilde{y}_1 = c_1 x(1-x) \tag{c}$$

y

$$\tilde{y}_{1x} = c_1(1-2x) \tag{d}$$

Sustituyendo las ecs.(c) y (d) en la ec.(a), se obtiene:

$$I = \int_0^1 \left[c_1^2(1-2x)^2 - c_1^2 x^2(1-x)^2 - 2x^2 c_1\, x(1-x)\right] dx \tag{e}$$

Luego, de acuerdo con la ec.(4.36):

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \int_0^1 \left[2\,c_1(1-2x)^2 - 2\,c_1 x^2(1-x)^2 - 2\,c_1 x^3(1-x)\right] dx = 0 \tag{f}$$

La integración de la ecuación anterior conduce al resultado:

$$c_1 = 0.1667 \tag{g}$$

Luego, la primera aproximación al problema propuesto viene dada por:

$$\tilde{y}_1 = 0.1667\, x(1-x) \tag{h}$$

Para mejorar esta solución se puede, por ejemplo, considerar dos términos de la ec.(b); es decir:

$$\tilde{y}_2 = x(1-x)(c_1 + c_2\, x) \tag{i}$$

y, por lo tanto:

$$\tilde{y}_{2x} = c_1(1-2x) + c_2(2x - 3x^2) \tag{j}$$

Sustituyendo las ecs.(i) y (j) en la ec.(a), se tendrá ahora que $I(\tilde{y}_2) = I(c_1, c_2)$. Haciendo uso, de nuevo, de la ec.(4.36), para i = 1,2, se tendrá que:

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0 \tag{k}$$

lo cual conduce al siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas en c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} 0.6000c_1 + 0.3000c_2 &= 0.1000 \\ 0.3000c_1 + 0.2476c_2 &= 0.0667 \end{aligned} \tag{l}$$

cuya solución es:

$$c_1 = 0.0813 \quad \text{y} \quad c_2 = 0.1703 \tag{m}$$

La segunda aproximación a este problema es, por lo tanto:

$$\tilde{y}_2 = x(1-x)[0.0813 + 0.1703\, x] \tag{n}$$

4.8.- Relación entre el método de Ritz y el método de los elementos finitos

Tal como se debe haber apreciado, el método de Ritz y el **mef** son, esencialmente, equivalentes. Ambos métodos utilizan un conjunto de funciones de aproximación como punto de partida para obtener una solución aproximada. La principal diferencia entre estos dos métodos, radica en el hecho que las funciones de aproximación asumidas en el **mef**, no están definidas sobre todo el dominio del problema, y además no deben satisfacer las condiciones de contorno, si no ciertas condiciones de continuidad. Debido a que el método de Ritz utiliza funciones de aproximación definidas sobre todo el dominio, su aplicación queda restringida solamente a aquellos dominios de forma geométrica relativamente simple. En el **mef**, existen las mismas limitaciones geométricas, pero únicamente a nivel de los elementos. Puesto que elementos con formas geométricas simples pueden ensamblarse para representar geometrías complejas, el **mef** es una herramienta numérica mucho más versátil que el método de Ritz.

4.9.- Deducción de las ecuaciones de los elementos finitos a partir de un principio variacional

La solución de un problema dado a través del **mef**, asociado con algún principio variacional, requiere la determinación de los valores nodales del campo de la variable (p.e., ϕ), que hacen estacionario el funcional del problema [p.e., $I(\phi)$]. Como ya se estableció, se requiere entonces que:

$$\delta I(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = 0 \tag{4.39}$$

donde *n* es el numero total de los valores discretos de ϕ asignados al dominio de la solución. Puesto que los $\delta\phi_i$ son independientes, la ec.(4.39) es válida sólo si:

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_i} = 0 \quad ; \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n \tag{4.40}$$

En el **mef**, el funcional $I(\phi)$ puede escribirse como la suma de los funcionales individuales definidos en cada uno de los elementos que conforman la discretización del dominio; es decir:

$$I(\phi) = \sum_{e=1}^{M} I^{(e)}\left(\phi^{(e)}\right) \tag{4.41}$$

donde M es el número total de elementos. Luego, en vez de trabajar con el funcional definido sobre toda la región del problema, se puede formular únicamente el funcional definido sobre cada uno de los elementos, en forma individual. De la ec.(4.41) se tiene:

$$\delta I = \sum_{e=1}^{M} \delta I^{(e)} = 0 \tag{4.42}$$

donde $\delta I^{(e)}$ se toma solamente con relación a los valores nodales asociados con el elemento (e). La ec. (4.42) implica que:

$$\left\{ \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi} \right\} = \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi_j} = 0 \quad ; \qquad j = 1,2,\ldots\ldots,r \tag{4.43}$$

donde r es el número de nodos del elemento (e). Las ecs.(4.43) comprenden un conjunto de r ecuaciones que caracterizan el comportamiento del elemento (e). El hecho que se pueda representar el funcional como la suma de los funcionales de todos los elementos individuales, proporciona la base para la formulación de las ecuaciones de un elemento en particular, a partir de algún principio variacional. El sistema completo de ecuaciones de todo el problema, se obtiene sumando todas las contribuciones [ecs.(4.43)], de todos los elementos en el proceso de ensamblaje del **mef**; es decir:

$$\frac{\partial I}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^{M} \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi_i} = 0 \qquad ; \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,n \tag{4.44}$$

La solución del problema se obtiene resolviendo el conjunto de las n ecuaciones simultáneas dadas por la ec.(4.44) para los n valores nodales de ϕ.

Nótese que este procedimiento es completamente independiente del principio variacional empleado, y que puede ser implementado en un esquema paso-a-paso en el método de los elementos finitos.

4.9.1.- Ejemplo 4.2. Solución de un problema de valor de contorno mediante un enfoque variacional

Sea el siguiente funcional:

$$I(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \phi^2 + 2\phi x \right] dx \tag{a}$$

sujeto a las siguientes condiciones de contorno: $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

Supóngase que se desea determinar una solución aproximada de ϕ a través del mef, donde las ecuaciones de los elementos se deduzcan mediante el método de Ritz. De acuerdo con la ec.(4.44), el método establece que:

$$\frac{\partial I(\phi)}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I(\phi)^{(e)}}{\partial \phi_i} = 0$$

donde:

$$I(\phi)^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{le} \left[-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \phi^2 + 2\phi x \right] dx \tag{b}$$

siendo *le* el dominio del elemento genérico *e*. Nótese que esta última ecuación es válida independiente del elemento utilizado. En particular en la solución de este problema se utilizarán elementos unidimensionales de dos nodos por elemento. Así, la aproximación de ϕ en el interior de cada elemento vendrá dada por:

$$\phi(x) = \Psi_j(x)\phi_j \tag{c}$$

Luego, sustituyendo la ec.(c) en la ec.(b), resulta:

$$I(\phi)^{(e)} = \frac{1}{2}\int_{le} \left\{ -\left[\frac{d}{dx}\left(\Psi_j \phi_j\right)\right]^2 + \left(\Psi_j \phi_j\right)^2 + 2\left(\Psi_j \phi_j\right)x \right\} dx \tag{d}$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial I(\phi)}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial I(\phi)^{(e)}}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left\{ \frac{1}{2} \int_{le} \left\{ -\left[\frac{d}{dx} \left(\Psi_j \phi_j \right) \right]^2 + \left(\Psi_j \phi_j \right)^2 + 2 \left(\Psi_j \phi_j \right) x \right\} dx \right\} = 0 \qquad \text{(e)}$$

Observando que $\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\Psi_j \phi_j \right) = \Psi_i$ y que $\frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\frac{d}{dx} \left(\Psi_j \phi_j \right) \right] = \frac{d\Psi_i}{dx}$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{le} \frac{d\Psi_i}{dx} \frac{d\Psi_j}{dx} dx \, \phi_j - \sum_{e=1}^{E} \int_{le} \Psi_i \Psi_j \, dx \, \phi_j = \sum_{e=1}^{E} \int_{le} \Psi_i x \, dx \qquad \text{(f)}$$

en forma matricial la ecuación anterior se escribe de la siguiente forma:

$$\left[\sum_{e=1}^{E} \left[k_{ij}^{(e)} \right] \right] \left\{ \sum_{e=1}^{E} \left\{ \phi_j^{(e)} \right\} \right\} = \left\{ \sum_{e=1}^{E} \left\{ f_i^{(e)} \right\} \right\} \qquad \text{(g)}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)} \right] = \int_{le} \frac{d\Psi_i}{dx} \frac{d\Psi_j}{dx} dx - \int_{le} \Psi_i \Psi_j \, dx \qquad \text{(h1)}$$

y

$$\left\{ f_i^{(e)} \right\} = \int_{le} \Psi_i x \, dx \qquad \text{(h2)}$$

Supóngase, en primer lugar, que se discretizará el dominio del problema con un solo elemento de dos nodos; es decir ϕ será aproximada linealmente en el interior del elemento. Las funciones de aproximación de este elemento son:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \qquad ; \qquad \Psi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Luego, puesto las funciones de interpolación son función de ξ, antes de evaluar las ecs.(h1)y (h2), se debe realizar, el respectivo cambio de variables; es decir:

$$x = x_j \Psi_j \qquad \Rightarrow \qquad dx = x_j \frac{d\Psi_j}{d\xi} d\xi \qquad \Rightarrow \qquad dx = J \, d\xi$$

donde: $J = x_j \frac{d\Psi_j}{d\xi}$ y, además:

$$\frac{d\Psi_j}{dx} = \frac{d\Psi_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\Psi_j}{dx} = J^{-1} \frac{d\Psi_j}{d\xi}$$

En este caso: $d\Psi_1/d\xi = -1/2$ y $d\Psi_2/d\xi = 1/2$ y por lo tanto:

$$dx = x_1\left(-\frac{1}{2}\right) + x_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{h_e}{2}$$

donde h_e es la longitud del elemento *(e)*. Así, las ecs.(h) se transforman en:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{-1}^{+1}\left[\frac{2}{h_e}\left(\frac{d\Psi_i}{d\xi}\frac{d\Psi_j}{d\xi}\right) - \Psi_i\Psi_j\right]d\xi \qquad \text{(i1)}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \frac{h_e}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi_i\, x_j\Psi_j d\xi \qquad \text{(i2)}$$

Ahora se pueden calcular los coeficientes de rigidez de este tipo de elemento:

$$k_{11}^{(e)} = k_{22}^{(e)} = \frac{1}{h_e} - \frac{h_e}{3} \qquad k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = -\frac{1}{h_e} - \frac{h_e}{6}$$

y los coeficientes del término independiente son:

$$f_1^{(e)} = \frac{x_1 h_e}{3} + \frac{x_2 h_e}{6} \qquad f_2^{(e)} = \frac{x_1 h_e}{6} + \frac{x_2 h_e}{3}$$

El sistema de ecuaciones, a nivel de cada elemento, viene entonces dado por:

$$\left[\frac{1}{h_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} - \frac{h_e}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = h_e\begin{Bmatrix}\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6}\\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3}\end{Bmatrix} \qquad \text{(j)}$$

a.-Discretización con dos elementos igualmente espaciados

En este caso, tal como se muestra en la Fig.e4.2.1, $h_e = 1/2$ y, para el primer elemento $x_1 = 0$ y $x_2 = 1/2$, para el segundo elemento $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 1$.

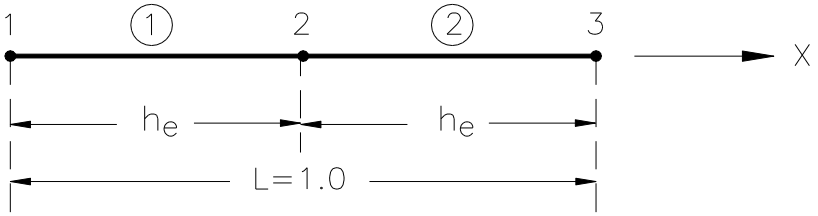


Fig.e4.2.1 Discretización del dominio con dos elementos unidimensionales lineales.

Luego, las matrices de rigidez de los dos elementos vienen dadas por:

$$\left[{}^{(1)}_{\mathrm{k_{ij}}}\right]=\left[{}^{(2)}_{\mathrm{k_{ij}}}\right]=\left[2\begin{bmatrix}1.0 & -1.0\\ -1.0 & 1.0\end{bmatrix}-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}22.0 & -25.0\\ -25.0 & 22.0\end{bmatrix}$$

y los respectivos vectores correspondientes a los términos independientes son:

$$\left\{{}^{(1)}_{\mathrm{f_i}}\right\}=\frac{1}{24}\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix} \qquad\qquad \left\{{}^{(2)}_{\mathrm{f_i}}\right\}=\frac{1}{24}\begin{Bmatrix}4\\ 5\end{Bmatrix}$$

Por lo tanto para esta discretización, el sistema global de ecuaciones será

$$\frac{1}{12}\begin{bmatrix}22.0 & -25.0 & 0.0\\ -25.0 & 44.0 & -25.0\\ 0.0 & -25.0 & 22.0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{24}\begin{Bmatrix}1\\ 6\\ 5\end{Bmatrix} \qquad \text{(k)}$$

Las condiciones de contorno en este caso son: $\phi_1=\phi_3=0$, y por lo tanto, la solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\frac{1}{12}(44.0)\phi_2=\frac{6}{24}\Rightarrow\phi_2=0.06818$$

b.-Discretización con tres elementos igualmente espaciados

En este caso, tal como se muestra en la Fig.e.4.2.2, $\mathrm{h_e}=1/3$ y, para el primer elemento $\mathrm{x_1}=0$ y $\mathrm{x_2}=1/3$, para el segundo elemento $\mathrm{x_1}=1/3$ y $\mathrm{x_2}=2/3$, y para el tercer elemento $\mathrm{x_1}=2/3$ y $\mathrm{x_2}=1.0$.

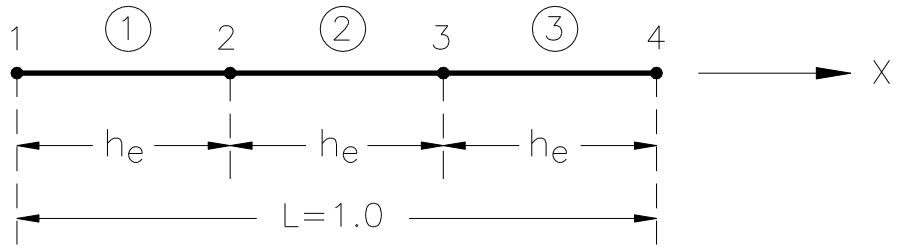


Fig.e4.2.2 Discretización del dominio con tres elementos unidimensionales lineales.

por lo tanto, las matrices de rigidez de los tres elementos vienen dadas por:

$$\left[{}^{(1)}_{\mathrm{k_{ij}}}\right]=\left[{}^{(2)}_{\mathrm{k_{ij}}}\right]=\left[{}^{(3)}_{\mathrm{k_{ij}}}\right]=\left[3\begin{bmatrix}1.0 & -1.0\\ -1.0 & 1.0\end{bmatrix}-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}52.0 & -55.0\\ -55.0 & 52.0\end{bmatrix}$$

y los respectivos vectores correspondientes a los términos independientes son:

$$\left\{\begin{matrix}(1)\\ f_i\end{matrix}\right\}=\frac{1}{54}\left\{\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix}(2)\\ f_i\end{matrix}\right\}=\frac{1}{54}\left\{\begin{matrix}4\\ 5\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix}(3)\\ f_i\end{matrix}\right\}=\frac{1}{54}\left\{\begin{matrix}7\\ 8\end{matrix}\right\}$$

Por lo tanto para esta discretización, el sistema global de ecuaciones será:

$$\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 52.0 & -55.0 & 0.0 & 0.0 \\ -55.0 & 104.0 & -55.0 & 0.0 \\ 0.0 & -55.0 & 104.0 & -55.0 \\ 0.0 & 0.0 & -55.0 & 52.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{Bmatrix}=\frac{1}{54}\begin{Bmatrix}1\\ 6\\ 12\\ 8\end{Bmatrix} \tag{l}$$

Ahora, las condiciones de contorno son: $\phi_1=\phi_4=0$, con lo cual el sistema anterior se reduce a:

$$\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 104.0 & -55.0 \\ -55.0 & 104.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_2\\ \phi_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{54}\begin{Bmatrix}6\\ 12\end{Bmatrix}$$

cuya solución es: $\phi_2=0.054935$ y $\phi_3=0.06751$. La solución exacta de este problema es:

$$\phi(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1}-x \tag{m}$$

Luego:

$$\phi(1/3)=0.05550 \qquad \phi(1/2)=0.069747 \qquad \phi(2/3)=0.06820$$

Como puede observarse, las soluciones aproximadas se comparan perfectamente con las soluciones exactas.

4.10.- Formulación variacional de problemas de la mecánica de los sólidos

La deducción de las ecuaciones de los elementos que gobiernan la mayoría de las aplicaciones del mef a problemas de la mecánica de los sólidos, se realiza a través de los llamados métodos de energía. Estos métodos están basados en el hecho que las ecuaciones que gobiernan un estado de esfuerzos dado, o una configuración deformable, se pueden deducir considerando la minimización de la energía asociada con los desplazamientos (principio de energía potencial mínima), los esfuerzos (principio de energía complementaria mínima), o una combinación de ambos (principio de Reissner).

Para un problema en particular, el uso de uno de estos principios podrá llegar a ser mas apropiado que otro, sin embargo, para la gran mayoría de los problemas relacionados con la mecánica de los sólidos, el principio de energía potencial mínima, no solo proporciona excelentes resultados, si no que también, desde el punto de vista computacional, es el mas fácil de aplicar. Por este motivo, y siendo consistente con el desarrollo del texto, en este Capítulo se abordarán, únicamente, los detalles de la deducción de las ecuaciones de los elementos asociadas con este principio. Antes, sin embargo, se hace necesario presentar un resumen de las ecuaciones básicas de la mecánica de los sólidos.

4.10.1.- Ecuaciones básicas de la mecánica de los sólidos

El comportamiento de un sólido deformable, bajo la acción de acciones externas, y sujeto a un determinado conjunto de condiciones de contorno, se define en términos de sus estados de deformaciones y de tensiones. Las leyes y relaciones que deben cumplir las variables que definen dichos estados, son de fundamental importancia y sirven de base para el estudio de estructuras resistentes. En esta sección, se resumen las ecuaciones básicas de la mecánica de los sólidos, para un material elástico lineal e isotrópico. Su deducción escapa al objetivo del texto, y pueden encontrarse en cualquier libro de la mecánica de los sólidos, o de la teoría de la elasticidad.

4.10.1a.- Ecuaciones de equilibrio externo

Si un cuerpo está en equilibrio bajo la acción de un estado de carga externo dado, las reacciones que se generan en los soportes (fuerzas y momentos), deben equilibrar las fuerzas y los momentos externos aplicados. En otras palabras, las ecuaciones de equilibrio estático deben verificarse en todo el cuerpo. En la Fig.4.5 se muestra un cuerpo sometido a un estado general de cargas. Si F_X, F_Y, F_Z, representan las fuerzas de volumen; T_X, T_Y, T_Z, son las fuerzas de superficie; P_X, P_Y, P_Z, son las fuerzas concentradas (incluyendo las reacciones en los soportes A, B, y C); M_X, M_Y, M_Z, son los momentos externos concentrados (incluyendo las reacciones en los soportes A, B, y C), las ecuaciones de equilibrio estático pueden establecerse a través de las siguientes ecuaciones:
Para el equilibrio de las fuerzas:

$$\int_V F_X \, dV + \int_S T_X \, dS + \sum P_X = 0 \tag{4.45a}$$

$$\int_V F_Y \, dV + \int_S T_Y \, dS + \sum P_Y = 0 \tag{4.45b}$$

$$\int_V F_Z \, dV + \int_S T_Z \, dS + \sum P_Z = 0 \tag{4.45c}$$

y para el equilibrio de los momentos:

$$\int_V (F_Z \, y - F_Y \, z) dV + \int_S (T_Z \, y - T_Y \, z) dS + \sum M_X = 0 \tag{4.46a}$$

$$\int_V (F_X \, z - F_Z \, x) dV + \int_S (T_X \, z - T_Z \, x) dS + \sum M_Y = 0 \tag{4.46b}$$

$$\int_V (F_Y \, x - F_X \, y) dV + \int_S (T_Y \, x - T_X \, y) dS + \sum M_Z = 0 \tag{4.46c}$$

donde V representa el volumen del sólido y S la superficie del mismo.

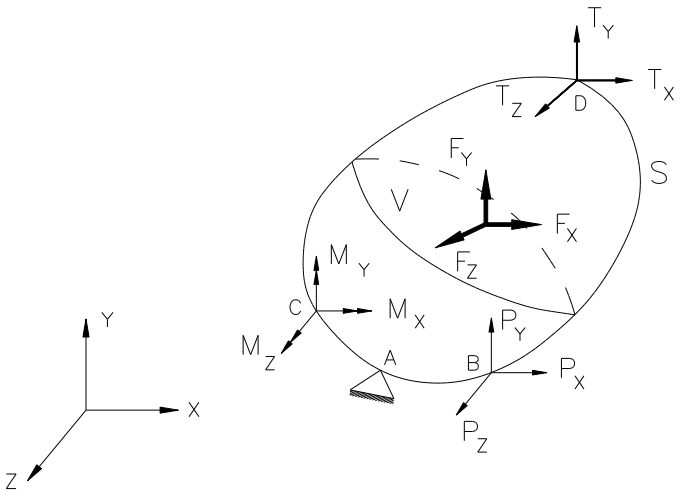


Fig.4.5 Cuerpo sometido a un estado general de cargas.

4.10.1b.- Ecuaciones de equilibrio interno

Debido a las acciones externas, un cuerpo se deforma y en cada uno de sus puntos aparecerán tensiones internas. Luego, cualquier elemento en el interior del cuerpo, debe equilibrarse con los esfuerzos internos que se generan. Este concepto se traduce en lo que se conoce con el nombre de *ecuaciones de equilibrio interno*. Teóricamente, el estado de esfuerzos en cualquier punto de un cuerpo cargado, queda completamente definido en términos de nueve componentes: σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx} y τ_{xz}. Las ecuaciones de equilibrio interno que relacionan estas nueve componentes del esfuerzo, se pueden deducir considerando el equilibrio de fuerzas y momentos que actúan en un elemento diferencial de volumen. En la Fig.4.6 se muestra, a modo de ejemplo, las componentes del esfuerzo en las caras perpendiculares a la dirección x.

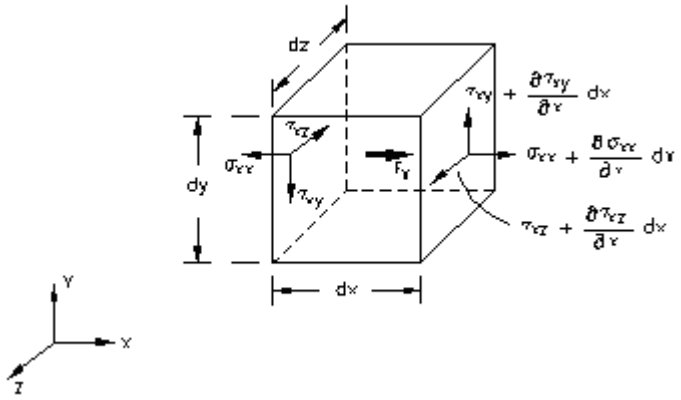


Fig.4.6 Equilibrio interno en un elemento diferencial de volumen. (únicamente en las caras perpendiculares al eje x).

Suponiendo que las fuerzas de volumen no producen momentos, el equilibrio de momentos alrededor de los tres ejes coordenados (x,y,z), conduce a:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad ; \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad ; \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{4.47}$$

Estas ecuaciones muestran que el estado de esfuerzos en cualquier punto del cuerpo, puede definirse completamente con sólo seis componentes σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}. El equilibrio de fuerzas en las direcciones x,y,z, conduce a las siguientes ecuaciones diferenciales de equilibrio:

a.- Caso tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \tag{4.48}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$$

b.- Caso bidimensional:

Para el caso bidimensional, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \tag{4.49a}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \tag{4.49b}$$

c.- Caso unidimensional:

En el caso unidimensional la única ecuación gobernante es:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + F_x = 0 \tag{4.50}$$

d.- Caso axisimétrico:

Los problemas tridimensionales que poseen simetría axial (sólidos de revolución o axisimétricos), sometidos a carga axial simétrica, se reducen a simples problemas bidimensionales. Las ecuaciones de equilibrio interno para esta clase de problemas, se expresan convenientemente, en las coordenadas cilíndricas r, θ, z, donde el eje z es el eje de rotación de simetría. La forma del cuerpo depende de r y z, pero es independiente de θ. Por lo tanto es suficiente considerar únicamente una sección transversal en el plano r, z $(r \geq 0)$. En la Fig. 4.7a

se muestra un ejemplo de este tipo de sólidos. Como puede apreciarse en la Fig.4.7b, debido a la total simetría de las cargas, todas las deformaciones y los esfuerzos son independientes del ángulo de rotación θ. El estado de esfuerzos que se genera en un elemento diferencial de volumen se muestra en la Fig.4.7.c.

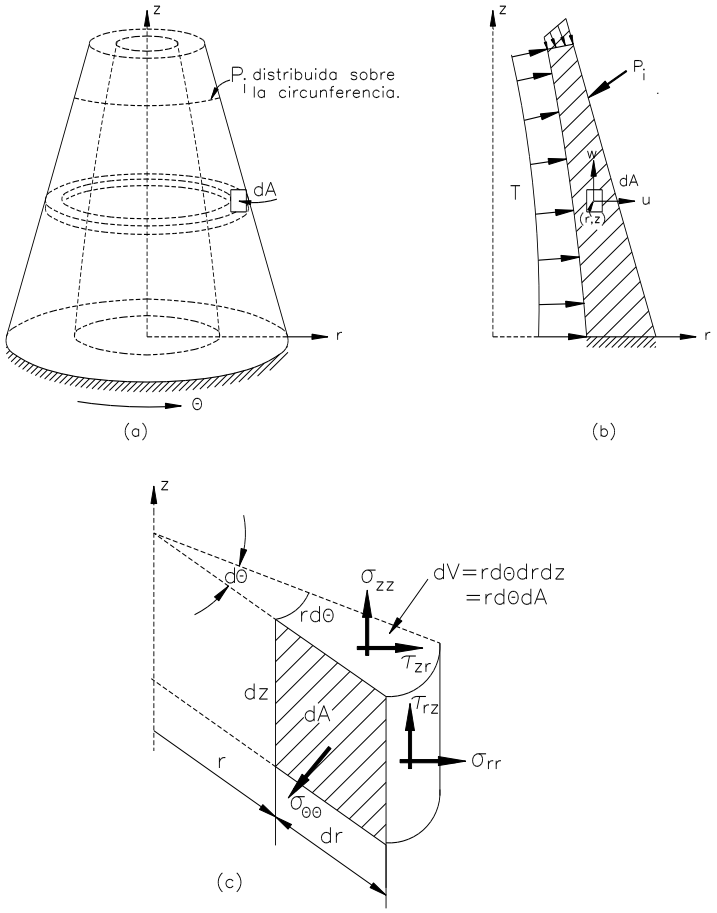


Fig.4.7 Sólido de revolución. (a) Geometría; (b) Estado de cargas; (b) Componentes del esfuerzo.

Las respectivas ecuaciones de equilibrio interno vienen dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0 \qquad (4.51)$$

donde F_r y F_z representan las fuerzas de volumen en las direcciones r y z, respectivamente.

4.10.1c.- Relaciones deformación-desplazamiento

Cuando la deformación de un cuerpo elástico es tal que sólo tienen lugar desplazamientos infinitesimales; es decir, la variación de la longitud y la rotación de cada fibra infinitesimal, son

pequeñas comparadas con la unidad, los términos no lineales de las relaciones deformación-desplazamiento, pueden despreciarse, y quedan reducidas a:

a.- Caso tridimensional:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u,x \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} = v,y \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} = u,z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = v,x + u,y \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w,y + v,z \tag{4.52}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u,z + w,x$$

donde u, v y w son las componentes del desplazamiento paralelas a las direcciones x, y, z, respectivamente.

b.- Caso bidimensional:

Para el caso bidimensional, estas ecuaciones quedan:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u,x\ ; \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} = v,y\ ; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = v,x + u,y \tag{4.53}$$

b.- Caso unidimensional:

en este caso la única relación desplazamiento-deformación es:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u,x \tag{4.54}$$

c.- Caso axisimétrico:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = u,r \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = w,z \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \tag{4.55}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = w,r + u,z$$

donde u y w son las componentes del desplazamiento paralelas a las direcciones r, y, z, respectivamente.

4.10.1d.- Ecuaciones de compatibilidad

Cuando un cuerpo sólido continuo se deforma sin llegar a la ruptura, no deben aparecer en el mismo grietas o discontinuidades. En tal caso, se dice que el campo de los desplazamientos; es decir, el conjunto de los desplazamientos de todos los puntos del sólido, es continuo. Las deformaciones calculadas a partir de los desplazamientos, según las ecuaciones anteriores, se dicen que son "compatibles". Cuando, en cambio, se dan las deformaciones, no se podrá, en general, calcular el campo de desplazamientos que las producen. Esto se debe a que existen seis deformaciones, pero solo tres desplazamientos. Para que las deformaciones sean efectivamente compatibles; es decir, que se deriven de un campo de desplazamientos continuo, deberán satisfacer las llamadas "ecuaciones de compatibilidad", las cuales vienen dadas por:

a.- Caso tridimensional:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\,; \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z}\,; \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}\,;\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} \tag{4.56}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$$

b.- Caso bidimensional:

Para el caso bidimensional, las relaciones que deben verificarse son:

- **Estado plano de deformaciones:**

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{4.57}$$

- **Estado plano de tensiones:**

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2}=0\,; \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}=0\,; \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}=0 \tag{4.58}$$

c.- Caso unidimensional:

En el caso unidimensional las condiciones de compatibilidad se satisfacen automáticamente.

d.- Caso axisimétrico:

Las relaciones deformación-desplazamiento dadas por las ecs.(4.55) conducen a la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \tag{4.59}$$

4.10.1e.- Ecuaciones constitutivas

a.- Caso tridimensional:

Para un material elástico lineal e isotrópico, las relaciones constitutivas, en el caso tridimensional, vienen dadas por:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{yy} \tag{4.60}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \qquad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \qquad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

donde:

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

y

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

son las llamadas constantes de Lamé.

b.-Caso bidimensional:

En problemas bidimensionales, estas ecuaciones se reducen a:

- **Estado plano de deformaciones:**

  En este caso: $\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Luego se tendrá:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{yy} \tag{4.61}$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

donde ahora:

$$e=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}$$

La componente del esfuerzo en la dirección z es distinta de cero y viene dada por:

$$\sigma_{zz}=\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right) \tag{4.62}$$

- **Estado plano de tensiones:**

En este caso: $\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$, y las ecuaciones constitutivas se pueden escribir en forma idéntica a las ecuaciones correspondientes al caso de estado plano de deformaciones, donde ahora:

$$\lambda=\frac{\nu E}{\left(1-\upsilon^2\right)} \qquad ; \qquad \mu=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}=G$$

c.- Caso unidimensional:

En el caso de problemas unidimensionales, la única componente del esfuerzo distinta de cero, es la componente normal σ_{xx}, la cual viene dada por:

$$\sigma_{xx}=E\,\varepsilon_{xx} \tag{4.63}$$

d.- Caso axisimétrico:

En este caso las ecuaciones constitutivas vienen dadas por:

$$\sigma_{rr}=\lambda e+2\mu\varepsilon_{rr} \tag{4.64a}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda e+2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \tag{4.64b}$$

$$\sigma_{zz}=\lambda e+2\mu\varepsilon_{zz} \tag{4.64c}$$

$$\tau_{rz}=\mu\gamma_{rz} \tag{4.64d}$$

donde ahora:

$$e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}$$

y

$$\lambda=\frac{\nu E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)} \qquad ; \qquad \mu=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}=G$$

4.10.1f.- Condiciones de contorno

En los problemas de la mecánica de los sólidos, pueden existir condiciones de contorno de diferente tipo, sin embargo, las mas frecuentemente encontradas, están asociadas bien sea con los desplazamientos, o con los esfuerzos. Las primeras requieren que sean conocidos los desplazamientos de algunos puntos situados en la superficie S del sólido, mientras que las segundas, requieren que los esfuerzos generados en el sólido, estén en equilibrio con las fuerzas externas aplicadas en algunas partes de la superficie del mismo.

Conceptualmente, se puede considerar que la superficie exterior del sólido, está dividida en dos partes S_1 y S_2, tal como se muestra en la Fig.4.8, de modo que:

$$S_1 \cup S_2 = S \tag{4.65}$$

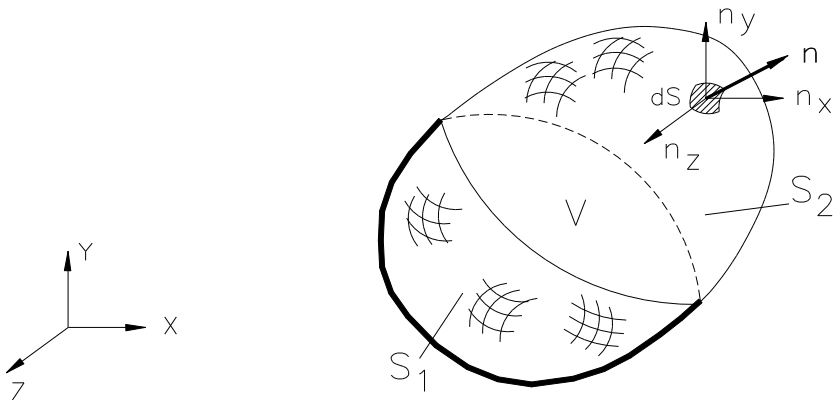


Fig.4.8 División teórica del contorno S de un cuerpo de volumen V.

Sobre la superficie S_1, se especifican las condiciones esenciales de contorno de desplazamientos, debiéndose verificar que:

$$u = \bar{u}; \qquad v = \bar{v}; \qquad w = \bar{w} \qquad \text{en } S_1 \tag{4.66}$$

donde $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$, son los desplazamientos conocidos.

Sobre la superficie S_2, se especifican las condiciones naturales de contorno de fuerzas, en donde se debe verificar que:

$$\bar{T}_n = \bar{\sigma}_n \qquad \text{en } S_2 \tag{4.67}$$

donde $\bar{T}_n$ es un vector de fuerzas conocidos en un punto de la superficie dado, y $\bar{\sigma}_n$ es el vector de tracciones internas en el mismo punto.

a.- Caso tridimensional

De acuerdo con el sistema de referencia seleccionado, para el caso tridimensional, las respectivas componentes del vector de tracciones viene dado por:

$$\overline{T}_x = \sigma_{xx}\, n_x + \tau_{xy}\, n_y + \tau_{xz}\, n_z$$

$$\overline{T}_y = \tau_{xy}\, n_x + \sigma_{yy}\, n_y + \tau_{yz}\, n \qquad \text{en } S_2 \qquad (4.68)$$

$$\overline{T}_z = \tau_{xy}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y + \sigma_{zz}\, n_z$$

b.- Caso Axisimétrico

Para el caso axisimétrico, las respectivas componentes del vector de tracciones vienen dadas por:

$$\overline{T}_r = \sigma_{rr}\, n_r + \tau_{rz}\, n_z$$

$$\text{en } S_2 \qquad (4.69)$$

$$\overline{T_z} = \tau_{rz}\, n_r + \sigma_{zz}\, n_z$$

Como ejemplo, para el caso bidimensional, en cualquier punto del contorno, las condiciones de contorno pueden ser alguna de las siguientes cuatro combinaciones:

a.- u y v especificadas $\Rightarrow$ T_x y T_y son las incógnitas.

b.- u y T_y especificadas $\Rightarrow$ T_x y v son las incógnitas.

c.- v y T_x especificadas $\Rightarrow$ T_y y u son las incógnitas.

d.- T_x y T_y especificadas $\Rightarrow$ u y v son las incógnitas.

4.10.2.- Principio de la mínima energía potencial

El principio de la mínima energía potencial establece que: *Para sistemas conservativos, de todos los posibles estados de desplazamientos cinemáticamente admisibles, aquellos que satisfacen las ecuaciones de equilibrio, corresponden a un valor estacionario de la energía potencial del sistema. Si la condición estacionaria es un mínimo, el estado de equilibrio es estable.*

Los desplazamientos cinemáticamente admisibles son aquellos que satisfacen la naturaleza de valor único de los desplazamientos (compatibilidad), y las condiciones de contorno. En este principio las incógnitas son los desplazamientos y por lo tanto la compatibilidad se satisface automáticamente.

La energía potencial π_p, de un sistema (cuerpo elástico y cargas que sobre él actúan) se define como:

$$\pi_p = U - W_p \qquad (4.70)$$

donde: U es la energía de deformación del cuerpo y W_p es el trabajo realizado sobre el cuerpo por las cargas externas.

4.10.3.- Elasticidad tridimensional

Para el caso tridimensional, el principio de la energía potencial mínima se expresa, matemáticamente, de la siguiente manera:

$$\partial\pi_p(u,v,w)=\partial U(u,v,w)-\delta W_p(u,v,w)=0 \tag{4.71}$$

Es importante que se note que la variación se realiza con respecto a los desplazamientos u,v y w, mientras que las fuerzas y los esfuerzos se suponen constantes.

4.10.3a.- Energía de deformación

El trabajo realizado por las fuerzas externas que causan una deformación dada, es almacenado en el interior del cuerpo en la forma de energía de deformación. En un proceso elástico ideal, no ocurre energía de disipación y toda la energía almacenada se recupera una vez que se descarga el cuerpo.

Considérese un prisma rectangular de dimensiones *dx, dy, dz*, el cual está sujeto a una tensión axial en la dirección x. En la Fig.4.9a. se muestra la vista correspondiente al plano xy de dicho elemento. Si se supone, como generalmente es el caso, que la carga se aplica muy lentamente, es razonable asumir que en todo instante se mantiene el equilibrio.

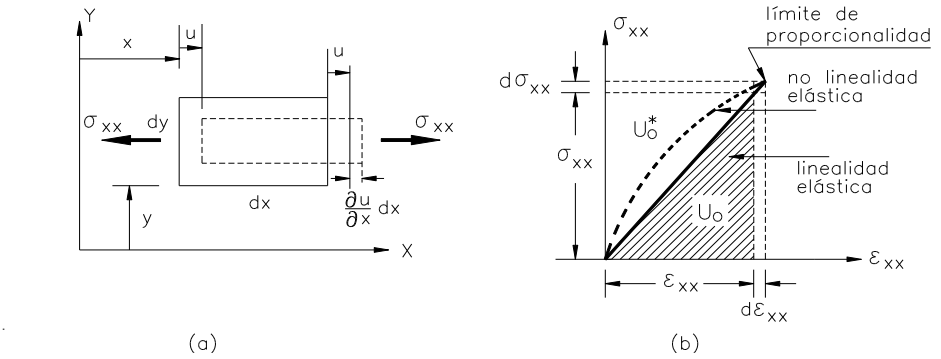


Fig.4.9 Energía de deformación. (a) Elemento sometido a fuerza axial; (b) Representación gráfica de la densidad de energía de deformación.

El trabajo neto realizado sobre el elemento por la fuerza $\sigma_x\,dy\,dz$, es por lo tanto:

$$dW=dU=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_{xx}\,d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dydz=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_{xx}\,d\varepsilon_{xx}(dxdydz) \tag{4.72}$$

Nótese que dW es el trabajo realizado sobre *dxdydz*, y dU es el correspondiente incremento de la energía de deformación.

Designando la energía por unidad de volumen (densidad de energía de deformación), como u_0, para un material elástico lineal se tiene que:

$$U_o=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_{xx}d\varepsilon_{xx}=\int_0^{\varepsilon_x}E\varepsilon_{xx}d\varepsilon_{xx} \tag{4.73}$$

Después de integrar la ec.(4.72), se obtiene:

$$U_o=\frac{1}{2}E\varepsilon_{xx}^2=\frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} \tag{4.74}$$

Esta cantidad representa el área sombreada mostrada en la Fig.4.9b. El área por encima de la curva esfuerzo-deformación, denominada densidad de energía complementaria, puede determinarse mediante:

$$U_o^*=\int_0^{\sigma_x}\varepsilon_{xx}d\sigma_{xx} \tag{4.75}$$

Para un material elástico lineal, $u_o=u_o^*$, pero para un material elástico no lineal u_o y u_o^* difieren, tal como puede apreciarse en la Fig.4.9b.

Cuando σ_{xx},σ_{yy} y σ_{zz} actúan simultáneamente, el trabajo total realizado por estos esfuerzos normales es, simplemente, la suma de expresiones similares a la ec.(4.74), en cada dirección. Esto se explica en el hecho que el esfuerzo en la dirección *x* no trabaja en las direcciones *y* o *z*. La energía de deformación total por unidad de volumen es entonces:

$$U_o=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}\right) \tag{4.76}$$

La energía de deformación elástica asociada con la deformación por corte, se puede analizar considerando un elemento de espesor *dz*, sujeto únicamente al esfuerzo cortante τ_{xy}, tal como se muestra en la Fig.4.10.

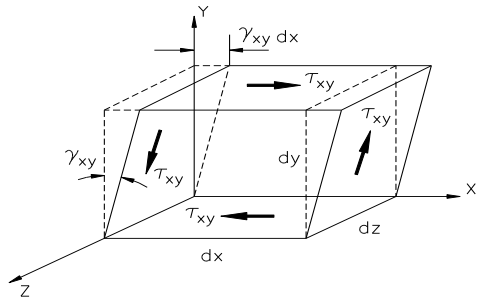


Fig.4.10 Elemento diferencial de volumen sometido a esfuerzos cortantes.

En dicha figura, se puede notar que la fuerza de corte $\tau_{xy}\,dx\,dz$ causa un desplazamiento igual a $\gamma_{xy}\,dy$. La energía de deformación vendrá dada ahora por:

$$U_o=\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}=\frac{1}{2G}\tau_{xy}^2=\frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 \tag{4.77}$$

Debido a que el trabajo realizado por τ_{xy} que acompaña las deformaciones perpendiculares γ_{yz} y γ_{xz} es cero, la densidad de energía de deformación total asociada únicamente al corte, se determina mediante el principio de superposición de los tres términos idénticos al dado por la ec.(4.77); es decir:

$$U_o=\frac{1}{2}\left(\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}\right) \tag{4.78}$$

En un caso general de esfuerzos, la densidad de la energía de deformación se determina sumando las ecs.(4.76) y (4.78):

$$U_o=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xz}\gamma_{xz}\right) \tag{4.79}$$

En función de los esfuerzos, la ley de Hooke viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{xx}=\lambda\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)+2\mu\varepsilon_{xx} \tag{4.80.a}$$

$$\sigma_{yy}=\lambda\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)+2\mu\varepsilon_{yy} \tag{4.80.b}$$

$$\sigma_{zz}=\lambda\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)+2\mu\varepsilon_{zz} \tag{4.80.c}$$

$$\tau_{xy}=\mu\gamma_{xy} \tag{4.80.d}$$

$$\tau_{yz}=\mu\gamma_{yz} \tag{4.80.e}$$

$$\tau_{xz}=\mu\gamma_{xz} \tag{4.80.f}$$

donde:

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \text{y} \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G$$

Introduciendo estas relaciones constitutivas en la ec.(4.60) se obtiene:

$$U_o=\frac{1}{2}\left[\lambda e^2+2\mu\left(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2+\varepsilon_{zz}^2\right)+\mu\left(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{xz}^2\right)\right] \tag{4.81}$$

Si ahora se introducen las relaciones deformación-desplazamiento dadas por las ecs.(4.52), en esta última ecuación se obtiene:

$$U_o=\frac{1}{2}\{\lambda(u,x+v,y+w,z)^2+2\mu\left[(u,x)^2+(v,y)^2+(w,z)^2\right]+$$

$$\mu\left[(u,y+v,x)^2+(v,z+w,y)^2+(u,z+w,x)^2\right]\} \qquad (4.82)$$

Es importante notar que U_o es función, únicamente, de los desplazamientos. Para determinar la energía de deformación almacenada en todo el cuerpo, se debe integrar la densidad de energía elástica sobre el volumen original, o no deformado, dV:

$$U=\int_V U_o\,dV=\frac{1}{2}\int_V\{\lambda(u,x+v,y+w,z)^2+2\mu\left[(u,x)^2+(v,y)^2+(w,z)^2\right]+$$

$$\mu\left[(u,y+v,x)^2+(v,z+w,y)^2+(u,z+w,x)^2\right]\}dx\,dy\,dz \qquad (4.83)$$

4.10.3b.- Trabajo realizado por las fuerzas externas

El trabajo realizado por las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo elástico, puede ser separado de acuerdo con el tipo de fuerza actuante: concentrada (P_i), de volumen (F_i) o de superficie (T_i).

El trabajo realizado por una fuerza concentrada (W_P)es, simplemente, el valor de la fuerza multiplicado por el desplazamiento, en la dirección de la fuerza en el punto de aplicación de la misma, luego:

$$W_P=\sum_{i=1}^{n}u_i\overline{P}_{xi}+v_i\overline{P}_{yi}+w_i\overline{P}_{zi} \qquad (4.84)$$

donde: n es el número de fuerzas concentradas que actúan sobre el cuerpo, $\overline{P}_{xi}$, $\overline{P}_{yi}$, $\overline{P}_{zi}$ son las componentes de la fuerza $\overline{P}_i$ en las direcciones de las componentes del desplazamiento u, v y w, respectivamente.

El trabajo realizado por las fuerzas de volumen (W_F), viene dado por:

$$W_F=\int_V\left(u\overline{F}_x+v\overline{F}_y+w\overline{F}_z\right)dV \qquad (4.85)$$

y, por último, el trabajo realizado por las fuerzas de superficie (W_S) se expresa mediante:

$$W_S=\int_{S_2}\left(u\overline{T}_x+v\overline{T}_y+w\overline{T}_z\right)dS_2 \qquad (4.86)$$

donde S_2 es la parte de la superficie S, en la cual las fuerzas de superficie están prescritas.

El trabajo total efectuado por las todas las fuerzas que actuan sobre el sistema es, entonces, igual a:

$$W = W_F + W_S + W_P = \int_V \left(u\,\overline{F}_x + v\,\overline{F}_y + w\,\overline{F}_z\right)dV + \int_{S_2} \left(u\,\overline{T}_x + v\,\overline{T}_y + w\,\overline{T}_z\right)dS_2 + \sum_{i=1}^{n} \left(u_i\,\overline{P}_{xi} + v_i\,\overline{P}_{yi} + w_i\,\overline{P}_{zi}\right) \qquad (4.87)$$

Sustituyendo ahora las ecs.(4.83) y (4.87) en la ec.(4.70), se obtiene la energía potencial del sistema:

$$\pi_P = \frac{1}{2}\int_V \left\{\lambda(u,x + v,y + w,z)^2 + 2\mu\left[(u,x)^2 + (v,y)^2 + (w,z)^2\right] + \mu\left[(u,y + v,x)^2 + (v,z + w,y)^2 + (u,z + w,x)^2\right]\right\}dx\,dy\,dz - \int_V \left(u\,\overline{F}_x + v\,\overline{F}_y + w\,\overline{F}_z\right)dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \left(u\,\overline{T}_x + v\,\overline{T}_y + w\,\overline{T}_z\right)dS_2 - \sum_{i=1}^{n} \left(u_i\,\overline{P}_{xi} + v_i\,\overline{P}_{yi} + w_i\,\overline{P}_{zi}\right) \qquad (4.88)$$

4.10.4.-Elasticidad axisimétrica

En el caso de la elasticidad axisimétrica, el principio de la energía potencial mínima se expresa, matemáticamente, de la siguiente manera:

$$\partial\pi_p(u,w) = \partial U(u,w) - \delta W_p(u,w) = 0 \qquad (4.89)$$

4.10.4a.-Energía de deformación

Siguiendo un razonamiento similar al empleado en la deducción de la ecuación que permite evaluar la energía de deformación, asociada con la elasticidad tridimensional, en el caso de los problemas relacionados con la elasticidad axisimétrica, dicha ecuación viene dada por:

$$U_o = \frac{1}{2}\left(\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{rz}\gamma_{rz}\right) \qquad (4.90)$$

En términos de los esfuerzos, la ley de Hooke viene dada, ahora, por las ecs. (4.64):

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}\right) + 2\mu\varepsilon_{rr}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}\right) + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}\right) + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}$$

Introduciendo las relaciones desplazamiento-deformación dadas por las ecs.(4.55) en la ec.(4.88) e integrando sobre el volumen del sólido, se obtiene:

$$U=\int_V U_o\,dV=\frac{1}{2}\int_V\left\{\lambda\left(u,r+\frac{u}{r}+w,z\right)^2+2\mu\left[(u,r)^2+\left(\frac{u}{r}\right)^2+(w,z)^2\right]\right.+$$

$$\left.\mu(u,z+w,r)^2\right\}r\,d\theta\,drdz=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_A\left\{\lambda\left(u,r+\frac{u}{r}+w,z\right)^2+2\mu\left[(u,r)^2+\left(\frac{u}{r}\right)^2+(w,z)^2\right]\right.+$$

$$\left.\mu(u,z+w,r)^2\right\}r\,drdz=$$

$$\pi r\int_A\left\{\lambda\left(u,r+\frac{u}{r}+w,z\right)^2+2\mu\left[(u,r)^2+\left(\frac{u}{r}\right)^2+(w,z)^2\right]+\mu(u,z+w,r)^2\right\}dA \qquad (4.91)$$

4.10.4b.- Trabajo realizado por las fuerzas externas

El trabajo realizado por las fuerzas concentradas se determina mediante:

$$W_P=\sum_{i=1}^{n}u_i\,\overline{P}_{ri}+w_i\,\overline{P}_{zi} \qquad (4.92)$$

donde: n es el número de fuerzas concentradas que actúan sobre el cuerpo, $\overline{P}_{ri}$, $\overline{P}_{zi}$ son las componentes de la fuerza $\overline{P}_i$ en las direcciones de las componentes del desplazamiento u, y w, respectivamente.

El trabajo efectuado por las fuerzas de volumen es igual a.

$$W_F=\int_V\left(u\,\overline{F}_r+w\,\overline{F}_z\right)dV=2\pi\int_A r\left(u\,\overline{F}_r+w\,\overline{F}_z\right)drdz \qquad (4.93)$$

y, finalmente el trabajo realizado por las fuerzas de superficie viene dado por:

$$W_S=\int_{S_2}\left(u\,\overline{T}_r+w\,\overline{T}_z\right)dS_1=2\pi\int_{S_2}r\left(u\,\overline{T}_r+w\,\overline{T}_z\right)dS_2 \qquad (4.94)$$

donde S_2 es la parte de la superficie S, en la cual las fuerzas de superficie están prescritas. El trabajo total efectuado por las todas las fuerzas que actúan sobre el sistema es igual a:

$$W=W_F+W_S+W_P=2\pi\int_A r\left(u\,\overline{F}_r+w\,\overline{F}_z\right)dA+2\pi\int_{S_2}r\left(u\,\overline{T}_r+w\,\overline{T}_z\right)dS_2+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u_i\,\overline{P}_{ri}+w_i\,\overline{P}_{zi}\right) \qquad (4.95)$$

De modo que la energía potencial del sistema, para este caso, viene dada por:

$$\pi_p = \pi r \int_A \left\{ \lambda\left(u,r + \frac{u}{r} + w,z \right)^2 + 2\mu\left[(u,r)^2 + \left(\frac{u}{r}\right)^2 + (w,z)^2 \right] + \mu(u,z + w,r)^2 \right\} drdz$$

$$- 2\pi \int_V r\left(u\,\bar{F}_r + w\,\bar{F}_z\right)dA - 2\pi \int_{S_2} r\left(u\,\bar{T}_r + w\,\bar{T}_z\right)dS_2 - \sum_{i=1}^{n}\left(u_i\,\bar{P}_{ri} + w_i\,\bar{P}_{zi}\right) = 0 \qquad (4.96)$$

Como ya se mencionó, el campo de desplazamientos $\bar{\mathbf{u}} = u(u,v,w)$ o $\bar{\mathbf{u}} = u(u,w)$, que minimiza π_p y satisface todas las condiciones de contorno, es aquel que satisface las ecuaciones de equilibrio.

Cuando se deducen las ecuaciones asociadas con el método de los elementos finitos a través del principio de energía potencial mínima, se asume la forma de la variación de los desplazamientos en el interior de cada elemento y se establecen las condiciones que minimizan el funcional π_p. Las ecuaciones resultantes son las ecuaciones de equilibrio aproximadas, mientras que las condiciones de compatibilidad se satisfacen automáticamente. Este método es llamado "método de rigidez o de los desplazamientos" del método de los elementos finitos.

4.11- Deducción de las ecuaciones de los elementos finitos asociadas al principio de la mínima energía potencial

La deducción de las ecuaciones de los elementos finitos, correspondientes al principio de la mínima energía potencial, se realizará a través del método de Ritz, tal como fue presentado en la sección 4.7.

4.11.1.- Elasticidad tridimensional

En el caso de la elasticidad tridimensional, el método de Ritz, de acuerdo con la ec.(4.44), conduce a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\frac{\partial \pi_P}{\partial u_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial u_i} = 0 \qquad (4.97a)$$

$$\frac{\partial \pi_P}{\partial v_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial v_i} = 0 \qquad (4.97b)$$

$$\frac{\partial \pi_P}{\partial w_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial w_i} = 0 \qquad (4.97c)$$

donde $\pi_P^{(e)}$ viene dado por la ec.(4.88).

Sobre cada elemento (e), el campo de los desplazamientos se aproximará, de acuerdo con el **mef**, del siguiente modo:

$$u = \Psi_j u_j \qquad j = 1,2,.....,r \qquad (4.98a)$$

$$v = \Psi_j v_j \qquad j = 1,2,.....,r \tag{4.98b}$$

$$w = \Psi_j w_j \qquad j = 1,2,.....,r \tag{4.98c}$$

donde r es en número de nodos por elemento. Luego, de acuerdo con la ec.(4.97a) se tendrá:

$$\frac{\partial \pi_p^{(e)}}{\partial u_i} = \int_V \Big\{ \lambda\left(\Psi_{j,x}u_j + \Psi_{j,y}v_j + \Psi_{j,z}w_j\right)\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,x}u_j + \Psi_{j,y}v_j + \Psi_{j,z}w_j\right) \; + $$

$$2\mu\left(\Psi_{j,x}u_j\right)\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,x}u_j\right) + \mu\Big[\left(\Psi_{j,y}u_j + \Psi_{j,x}v_j\right)\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,y}u_j + \Psi_{j,x}v_j\right) \; +$$

$$\left(\Psi_{j,z}u_j + \Psi_{j,x}w_j\right)\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,z}u_j + \Psi_{j,x}w_j\right) + \Big]\Big\} dx\,dy\,dz \; -$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_j u_j\right)\overline{F}_x \, dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_j u_j\right)\overline{T}_x \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{xi} = 0$$

$$\int_V \Big\{\lambda\left(\Psi_{j,x}u_j + \Psi_{j,y}v_j + \Psi_{j,z}w_j\right)\Psi_{i,x} + 2\mu\Psi_{j,x}u_j\Psi_{i,x} + \mu\Big[\left(\Psi_{j,y}u_j + \Psi_{j,x}v_j\right)\Psi_{i,y} \; +$$

$$\left(\Psi_{j,z}u_j + \Psi_{j,x}w_j\right)\Psi_{i,z}\Big]\Big\} dx\,dy\,dz - \int_V \Psi_i \overline{F}_x \, dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_x \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{xi} = 0$$

donde es importante notar que: $\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_j u_j\right) = \Psi_i$, $\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,x}u_j\right) = \Psi_{i,x}$, etc. Agrupando términos:

$$\int_V \Big\{\Big[(\lambda + 2\mu)\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \mu\left(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)\Big]u_j + \Big[\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,y} + \mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,x}\Big]v_j \; +$$

$$\Big[\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,z} + \mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,x}\Big]w_j\Big\} dx\,dy\,dz \; -$$

$$\int_V \Psi_i \overline{F}_x \, dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_x \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{xi} = 0 \tag{4.99a}$$

donde:

$$\overline{T}_x = \left[(\lambda + 2\mu)u,x + \lambda(v,y + w,z)\right]n_x + \mu(u,y + v,x)n_y + \mu(u,z + w,x)n_z$$

De forma similar, de la ec.(4.97b) se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_p^{(e)}}{\partial v_i} = \int_V \Big\{\Big[\lambda\Psi_{i,y}\Psi_{j,x} + \mu\Psi_{i,x}\Psi_{j,y}\Big]u_j + \Big[(\lambda + 2\mu)\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \mu\left(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)\Big]v_j \; +$$

$$\Big[\lambda\Psi_{i,y}\Psi_{j,z} + \mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,y}\Big]w_j\Big\} dx\,dy\,dz \; -$$

$$\int_V \Psi_i \overline{F}_y \, dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_y \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{yi} = 0 \tag{4.99b}$$

donde:

$$\overline{T}_y = \mu(u, y+v, x)n_x + [(\lambda+2\mu)v, y + \lambda(u, x+w, z)]n_y + \mu(w, y+v, z)n_z$$

y, finalmente, de la ec.(4.97c):

$$\frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial w_i} = \int_V \{[\lambda\Psi_{i,z}\Psi_{j,x} + \mu\Psi_{i,x}\Psi_{j,z}]u_j + [\lambda\Psi_{i,z}\Psi_{j,y} + \mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,z}]w_j - [(\lambda+2\mu)\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \mu(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y})]w_j\} dx\,dy\,dz - \int_V \Psi_i \overline{F}_z\, dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_z\, dS_2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{zi} = 0 \quad (4.99c)$$

donde:

$$\overline{T}_z = \mu(u, z+w, x)n_x + \mu(w, y+v, z)n_y + [(\lambda+2\mu)w, z + \lambda(u, x+v, y)]n_z$$

Luego, a nivel de cada elemento (e), las ecs.(4.99) se pueden escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} \\ \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{21} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} \\ \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{31} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{32} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_j^{(e)}\} \\ \{v_j^{(e)}\} \\ \{w_j^{(e)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{i1}^{(e)}\} \\ \{f_{i2}^{(e)}\} \\ \{f_{i3}^{(e)}\} \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = \int_V [(\lambda+2\mu)\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \mu(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z})]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \int_V [\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,y} + \mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,x}]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} = \int_V [\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,z} + \mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,x}]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} = \int_V [(\lambda+2\mu)\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \mu(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z})]dx\,dy\,dz \quad (4.101)$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} = \int_V [\lambda\Psi_{i,y}\Psi_{j,z} + \mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,y}]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} = \int_V [(\lambda+2\mu)\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \mu(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y})]dx\,dy\,dz$$

y, por simetría:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{21} = \left[k_{ji}^{(e)}\right]^{12} \quad ; \quad \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{31} = \left[k_{ji}^{(e)}\right]^{13} \quad ; \quad \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{32} = \left[k_{ji}^{(e)}\right]^{23}$$

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i \overline{F}_x \, dx\, dy\, dz + \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_x \, dS_2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{xi}$$

$$\left\{f_{i2}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i \overline{F}_y \, dx\, dy\, dz + \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_y \, dS_2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{yi}$$

$$\left\{f_{i3}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i \overline{F}_z \, dx\, dy\, dz + \int_{S_2} \Psi_i \overline{T}_z \, dS_2 + \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{zi}$$

Nótese que la deducción de las ecuaciones anteriores es independiente del tipo de elemento finito (y por lo tanto independiente de las funciones de interpolación) seleccionado. Una vez decidido el elemento a usar, se podrá determinar, a nivel de cada elemento, los coeficientes de cada una de las matrices y vectores dados por las ecs.(4.101).

Finalmente, el ensamblaje de las matrices y vectores de las ecs.(4.101) conduce al siguiente sistema global de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} & \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} \\ \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{21} & \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} & \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} \\ \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{31} & \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{32} & \sum_{e=1}^{E}\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{e=1}^{E}\left\{u_j^{(e)}\right\} \\ \sum_{e=1}^{E}\left\{v_j^{(e)}\right\} \\ \sum_{e=1}^{E}\left\{w_j^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=1}^{E}\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} \\ \sum_{e=1}^{E}\left\{f_{i2}^{(e)}\right\} \\ \sum_{e=1}^{E}\left\{f_{i3}^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} \tag{4.102}$$

el cual, una vez introducidas las respectivas condiciones de contorno y resuelto, permitirá conocer el campo de desplazamientos asociado a un problema dado de la mecánica de los sólidos.

4.11.2.- Elasticidad axisimétrica

En el caso de la elasticidad axisimétrica, el método de Ritz, conduce a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\frac{\partial \pi_P}{\partial u_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial u_i} = 0 \tag{4.103a}$$

$$\frac{\partial \pi_P}{\partial w_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial w_i} = 0 \tag{4.103b}$$

donde $\pi_P^{(e)}$ viene dado por la ec.(4.96).

Sobre cada elemento (e), el campo de los desplazamientos se aproximará, de acuerdo con el mef, del siguiente modo:

$$u = \Psi_j u_j \qquad j = 1,2,.....,r \tag{4.104a}$$

$$w = \Psi_j w_j \qquad j = 1,2,.....,r \tag{4.104b}$$

donde r es en número de nodos por elemento. Luego, de acuerdo con la ec.(4.103a) se tendrá:

$$\frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial u_i} = 2\pi \int_V \left\{ r\lambda \left(\Psi_{j,r} u_j + \frac{1}{r}\Psi_j u_j + \Psi_{j,z} w_j \right) \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,r} u_j + \frac{1}{r}\Psi_j u_j + \Psi_{j,z} w_j \right) + \right.$$
$$2\mu r \left[\left(\Psi_{j,r} u_j\right) \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,r} u_j\right) + \left(\frac{1}{r}\Psi_j u_r\right) \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{r}\Psi_j u_r\right) + \left(\Psi_{j,z} w_j\right) \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,z} w_j\right) \right] +$$
$$\left. \mu r \left[\left(\Psi_{j,z} u_j + \Psi_{j,r} w_j\right) \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_{j,z} u_j + \Psi_{j,r} w_j\right) \right] \right\} dr\, dz -$$
$$2\pi \int_A r \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_j u_j\right) \overline{F}_r \, dr\, dz - 2\pi \int_{S_2} r \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\Psi_j u_j\right) \overline{T}_r \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{ri} = 0$$

Puesto que la constante 2π es común a todos los términos, éste término puede ser removido de la ecuación anterior. Luego, agrupando términos:

$$\int_A \left\{ \left[r(\lambda + 2\mu)\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \mu r \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + (\lambda + 2\mu)\frac{\Psi_i \Psi_j}{r} + \lambda\left(\Psi_{i,r}\Psi_j + \Psi_i \Psi_{j,r}\right) + \right] u_j + \right.$$
$$\left. \left[r\lambda\Psi_{i,r}\Psi_{j,z} + \lambda\Psi_i\Psi_{j,z} + r\mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} \right] w_j \right\} dr\, dz -$$
$$\int_A r \Psi_i \overline{F}_r \, dr\, dz - \int_{S_2} r \Psi_i \overline{T}_r \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{ri} = 0 \tag{4.105a}$$

donde:

$$\overline{T}_r = \left[(\lambda + 2\mu)u,r + \lambda\left(\frac{u}{r} + w,z\right) \right] n_r + \mu(w,r + u,z) n_z$$

De forma similar, de la ec.(4.103b) se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_P^{(e)}}{\partial w_i} = \int_A \left\{ \left[\lambda\left(r\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} + \Psi_{i,z}\Psi_j \right) + \mu r \Psi_{i,r}\Psi_{j,z} \right] u_j + \right.$$
$$\left. \left[(\lambda + 2\mu) r \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \mu r \Psi_{i,r}\Psi_{j,r} \right] w_j \right\} dr\, dz \; -$$
$$\int_A r \Psi_i \overline{F}_z \, dr dz - \int_{S_2} r \Psi_i \overline{T}_z \, dS_2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{zi} = 0 \tag{4.105b}$$

donde:

$$\overline{T}_z = \mu(w,r + u,z) n_r + \left[(\lambda + 2\mu)w,z + \lambda\left(\frac{u}{r} + u,r\right) \right] n_z$$

A nivel de cada elemento (e), estas ecuaciones se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} \\ \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{21} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{u_j^{(e)}\right\} \\ \left\{w_j^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{f_{i1}^{(e)}\right\} \\ \left\{f_{i2}^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} \tag{4.106}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = \int_A \left[r(\lambda+2\mu)\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \mu r \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \lambda \frac{\Psi_i\Psi_j}{r} + \lambda\left(\Psi_{i,r}\Psi_j + \Psi_i\Psi_{j,r}\right) + 2\mu \frac{\Psi_i\Psi_j}{r} \right] dr\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \int_A \left[r\lambda\Psi_{i,r}\Psi_{j,z} + \lambda\Psi_i\Psi_{j,z} + r\mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} \right] dr\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{21} = \int_A \left[\lambda\left(r\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} + \Psi_{i,z}\Psi_j\right) + \mu r \Psi_{i,r}\Psi_{j,z} \right] dr\,dz \tag{4.107}$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} = \int_A \left[(\lambda+2\mu) r \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \mu r \Psi_{i,r}\Psi_{j,r} \right] dr\,dz$$

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \int_A r\Psi_i \bar{F}_r\, dr\,dz + \int_{S_2} r\Psi_i \bar{T}_r\, dS_2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_{ri}$$

$$\left\{f_{i2}^{(e)}\right\} = \int_A r\Psi_i \bar{F}_z\, dr\,dz + \int_{S_2} r\Psi_i \bar{T}_z\, dS_2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_{zi}$$

Finalmente, el ensamblaje de las matrices y vectores de las ecs.(4.107), sigue el mismo procedimiento general ya discutido y conducirá a un sistema de ecuaciones similar al de la ec.(4.102).

4.12.- Evaluación de los coeficientes de las matrices locales de rigidez y de los vectores de cargas nodales equivalentes de los elementos

Para facilitar la escritura, y sin que por ello se pierda generalidad en el procedimiento del cálculo de la matriz de rigidez de los sistemas (4.101) o (4.107), se supondrá el caso bidimensional del primer conjunto de ecuaciones; es decir:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = t\int_A \left[(\lambda+2\mu)\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} \right] dx\,dy \tag{4.108a}$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \left[k_{ji}^{(e)}\right]^{21} = t\int_A \left[\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,y} + \mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,x} \right] dx\,dy \tag{4.108b}$$

$$\left[\overset{(e)}{k_{ij}}\right]^{22} = t\int_A \left[(\lambda+2\mu)\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \mu\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}\right] dx\,dy \tag{4.108c}$$

4.12.1.-Coeficientes de la matriz de rigidez

Para la evaluación de los respectivos coeficientes de rigidez se debe, en primer lugar, transformar estas ecuaciones al sistema local de referencia (ξ,η) de cada elemento. De acuerdo con las ecs(3.60), se tendrá entonces:

$$\left[\overset{(e)}{k_{ij}}\right]^{11} = t\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[(\lambda+2\mu)\left(J^*_{11}\Psi_{i,\xi}+J^*_{12}\Psi_{i,\eta}\right)\left(J^*_{11}\Psi_{j,\xi}+J^*_{12}\Psi_{j,\eta}\right)+ \mu\left(J^*_{21}\Psi_{i,\xi}+J^*_{22}\Psi_{i,\eta}\right)\left(J^*_{21}\Psi_{j,\xi}+J^*_{22}\Psi_{j,\eta}\right)|J|\right]d\xi\,d\eta \tag{4.109a}$$

$$\left[\overset{(e)}{k_{ij}}\right]^{12} = \left[\overset{(e)}{k_{ji}}\right]^{21} = t\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\lambda\left(J^*_{11}\Psi_{i,\xi}+J^*_{12}\Psi_{i,\eta}\right)\left(J^*_{21}\Psi_{j,\xi}+J^*_{22}\Psi_{j,\eta}\right)+ \mu\left(J^*_{21}\Psi_{i,\xi}+J^*_{22}\Psi_{i,\eta}\right)\left(J^*_{11}\Psi_{j,\xi}+J^*_{12}\Psi_{j,\eta}\right)\right]|J|d\xi\,d\eta \tag{4.109b}$$

$$\left[\overset{(e)}{k_{ij}}\right]^{22} = t\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[(\lambda+2\mu)\left(J^*_{21}\Psi_{i,\xi}+J^*_{22}\Psi_{i,\eta}\right)\left(J^*_{21}\Psi_{j,\xi}+J^*_{22}\Psi_{j,\eta}\right)+ \mu\left(J^*_{11}\Psi_{i,\xi}+J^*_{12}\Psi_{i,\eta}\right)\left(J^*_{11}\Psi_{j,\xi}+J^*_{12}\Psi_{j,\eta}\right)\right]|J|\,d\xi\,d\eta \tag{4.109c}$$

donde $|J|$ y J^*_{ij}, son, respectivamente, el jacobiano de la transformación y los coeficientes de la inversa del mismo, los cuales están dados por la ec.(3.71).

Como puede apreciarse, estas ecuaciones sólo podrán ser integradas numéricamente de acuerdo, según el tipo de elemento utilizado, con las fórmulas de integración dadas en la Tabla 3.3.

4.12.2.- Coeficientes del vector de cargas nodales equivalente

Para la evaluación del vector de cargas nodales equivalente, considérese el caso particular mostrado en la Fig.4.11a.

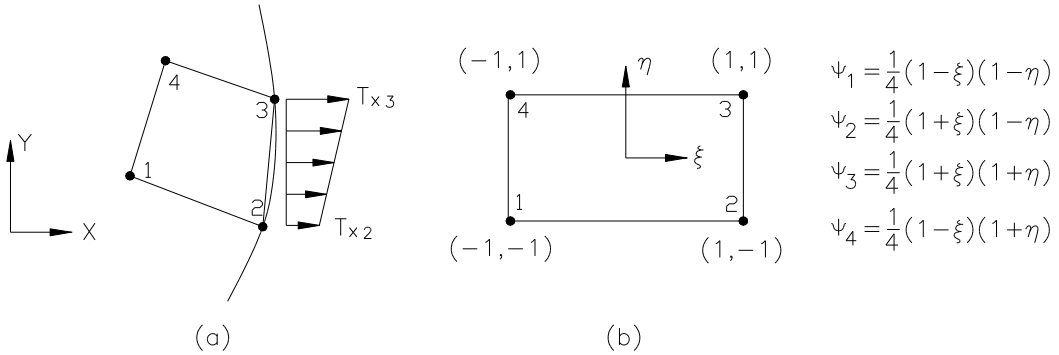


Fig.4.11 Vector de cargas nodales equivalentes para el elemento rectangular lineal.

Se supone que el elemento mostrado está situado en el contorno y que sobre su lado $\overline{23}$ actúa una carga distribuida en la dirección x. En este lado del elemento patrón, $\xi = 1$ y por lo tanto, las funciones de interpolación de este elemento se reducen a: $\Psi_1 = \Psi_4 = 0$, y $\Psi_2 = 1/2(1-\eta)$ y $\Psi_3 = 1/2(1+\eta)$.

En este caso, el vector de cargas viene dado por :

$$\left\{ \overset{(e)}{f_{i1}} \right\} = \int_{S_1} \Psi_i \overline{T}_x \, dS_1 \tag{4.110}$$

Luego:

$$dS_1 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{4.111}$$

$$dS_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\overset{(e)}{J}_{11} d\xi + \overset{(e)}{J}_{21} d\eta \right)^2 + \left(\overset{(e)}{J}_{12} d\xi + \overset{(e)}{J}_{22} d\eta \right)^2}$$

Sobre el lado $\overline{23}$, adicionalmente, $d\xi = 0$ y, por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a:

$$dS_1 = \overset{(e)}{J}_S(1, \eta) d\eta \tag{4.112}$$

es decir:

$$\overset{(e)}{J}(1, \eta) = \sqrt{\left(\overset{(e)}{J}_{21} d\eta \right)^2 + \left(\overset{(e)}{J}_{22} d\eta \right)^2} \tag{4.113}$$

donde:

$$\overset{(e)}{J}_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = x_2 \Psi_{2,\eta} + x_3 \Psi_{3,\eta} = \frac{x_3 - x_2}{2}$$

$$\overset{(e)}{J}_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_2 \Psi_{2,\eta} + y_3 \Psi_{3,\eta} = \frac{y_3 - y_2}{2}$$

Luego:

$$\overset{(e)}{J}_S(1, \eta) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \frac{h_e}{2}$$

$$dS_1 = \frac{h_e}{2} d\eta \tag{4.114}$$

donde h_e es la longitud del lado $\overline{23}$. Además, se deberá expresar la carga en función de η; es decir:

$$T(\eta) = T_{x2}\Psi_2 + T_{x3}\Psi_3 = \frac{1}{2}(1-\eta)T_{x2} + T_{x3}\frac{1}{2}(1+\eta) =$$

$$\left(\frac{T_{x2}+T_{x3}}{2}\right) + \left(\frac{T_{x3}+T_{x2}}{2}\right)\eta \qquad (4.115)$$

Luego:

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \frac{h_e}{2}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \int_{-1}^{+1} \Psi_i T(\eta) d\eta \qquad (4.116)$$

Finalmente, para el caso mostrado en la Fig.4.11a, se tendrá, para el nodo 2:

$$\left\{f_{21}^{(e)}\right\} = \frac{h_e}{2}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \int_{-1}^{+1} \Psi_2 T(\eta) d\eta =$$

$$\frac{h_e}{2}\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(1-\eta)\left[\left(\frac{T_{x2}+T_{x3}}{2}\right) + \left(\frac{T_{x3}-T_{x2}}{2}\right)\eta\right] d\eta \qquad (4.117)$$

y para el nodo 3:

$$\left\{f_{31}^{(e)}\right\} = \frac{h_e}{2}\{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T \int_{-1}^{+1} \Psi_3 T(\eta) d\eta =$$

$$\frac{h_e}{2}\{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(1+\eta)\left[\left(\frac{T_{x2}+T_{x3}}{2}\right) + \left(\frac{T_{x3}-T_{x2}}{2}\right)\eta\right] d\eta \qquad (4.118)$$

En este caso, la evaluación numérica de estas integrales se realiza mediante las fórmulas de integración dadas en la Tabla 3.2. Procediendo de forma similar, se obtienen las expresiones del vector de cargas nodales equivalentes para cualesquiera de los otros lados donde actúe la carga distribuida y cualquiera que sea la dirección de ésta. La simplicidad de este caso permite, sin embargo la evaluación exacta de dichas integrales, cuyo resultado es:

$$\left\{f_{21}^{(e)}\right\} = \frac{h_e}{6}(2T_{x2} + T_{x3})\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \qquad (4.119a)$$

$$\left\{f_{31}^{(e)}\right\} = \frac{h_e}{6}(T_{x2} + 2T_{x3})\{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T \qquad (4.119b)$$

4.13.- Solución de problemas de la mecánica de los sólidos vía el principio de la mínima energía potencial

Con el objetivo de ilustrar la aplicación de las ecuaciones de los elementos finitos, derivados del principio de la mínima energía potencial, en esta sección se presentará la solución de algunos problemas del área de la mecánica de los sólidos.

4.13.1.- Ejemplo 4.3. Barra unidimensional sometida a carga axial

En la Fig.e4.3.1 se muestra una barra de aluminio $(E = 70\,MPa y \rho = 2800\,Kg/m^3)$, y su discretización en elementos finitos, lineales, de dos nodos por elemento. La longitud de la barra es $L = 1.0\,m$ y el área de la sección transversal es $0.10\,m^2$. La barra está sujeta a su propio peso (w) y a una carga concentrada $P = 10\,KN$ en su extremo libre B. Se desea determinar los desplazamientos del punto $y = 0.5$ y del extremo libre B, así como también las deformaciones y esfuerzos en los elementos.

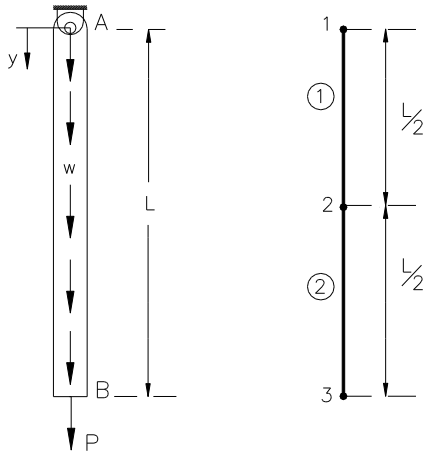


Fig.e4.3.1 Barra sometida a carga axial y su discretización en elementos finitos.

Para este caso unidimensional, las ecuaciones de los elementos finitos, deducidas mediante el principio de la energía potencial mínima [ecs. (4.69)], se reducen a:

$$\left[{}^{(e)}k_{ij} \right] \left\{ {}^{(e)}v_i \right\} = \left\{ {}^{(e)}f_i \right\}$$

donde: $$\left[{}^{(e)}k_{ij} \right] = \int_L (AE)\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\, dy \qquad \left\{ {}^{(e)}f_i \right\} = \int_L \Psi_i \overline{F}_y\, dy + \overline{P}_{yi} \qquad i = 1,2$$

donde las funciones de interpolación son: $\Psi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$ y $\Psi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$. Después de realizar un cambio de variables similar al del ejemplo anterior, estas ecuaciones se transforman en:

$$\left[{}^{(e)}k_{ij} \right] = \frac{2AE}{h_e} \int_{-1}^{+1} \Psi_{i,\xi}\Psi_{j,\xi} d\xi \qquad \left\{ {}^{(e)}f_i \right\} = \frac{\rho g A h_e}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \int_{-1}^{+1} \Psi_i d\xi + \overline{P}_{yi}$$

Luego:

$$\left[{}^{(1)}k_{ij} \right] = \left[{}^{(2)}k_{ij} \right] = \frac{0.10 \times 70 \times 10^6}{0.50} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 14.0 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ f_i^{(1)} \right\} = \frac{2800 \times 9.80 \times 0.2 \times 0.50}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 686.0 \\ 686.0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ f_i^{(2)} \right\} = \frac{2800 \times 9.80 \times 0.1 \times 0.50}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 10000.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 686.0 \\ 10686.0 \end{Bmatrix}$$

El ensamblaje de estas ecuaciones conduce a:

$$10^6 \begin{bmatrix} 14.0 & -14.0 & 0.0 \\ -14.0 & 28.0 & -14.0 \\ 0.0 & -14.0 & 14.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 686.0 \\ 1372.0 \\ 10686.0 \end{Bmatrix}$$

Cuya solución es: $V_1 = 0.0\,\text{mm}$, $V_2 = 0.86129\,\text{mm}$ y $V_3 = 1.62460\,\text{mm}$. Las deformaciones de los elementos son:

$$\varepsilon_y^{(1)} = \frac{0.86129 - 0.00}{500} = 1.7226 \times 10^{-3}\,\frac{\text{mm}}{\text{mm}} \qquad \varepsilon_y^{(2)} = \frac{1.6246 - 0.86129}{500} = 1.5266 \times 10^{-3}\,\frac{\text{mm}}{\text{mm}}$$

y, finalmente, los esfuerzos son:

$$\sigma_y^{(1)} = E\,\varepsilon_y^{(1)} = 70 \times 10^6 \times 1.72258 \times 10^{-3} = 120{,}58\,\text{KPa}$$

$$\sigma_y^{(2)} = E\,\varepsilon_y^{(2)} = 70 \times 10^6 \times 1.52662 \times 10^{-3} = 106{,}86\,\text{KPa}$$

La solución exacta de este problema viene dada por:

$$V(y) = \frac{Q\,y}{A\,E} + \frac{\rho\,g}{E}\left(L\,y - \frac{y^2}{2} \right)$$

$$\varepsilon(y) = \frac{Q}{A\,E} + \frac{\rho\,g}{E}\left(L\,y - y \right)$$

$$\sigma(y) = \frac{Q}{A} + \rho\,g\left(L - y \right)$$

El lector podrá notar que los resultados numéricos coinciden con la solución exacta.

4.13.2.- Ejemplo 4.4. Placa delgada sometida a un estado de carga uniforme

En la Fig.e4.4.1 se muestra una placa delgada, y su discretización en elementos rectangulares lineales, de cuatro nodos por elemento. El material de la placa se supone isotrópico. El estado de carga es el indicado, y se desea determinar los desplazamientos que se originan en los nodos libres.

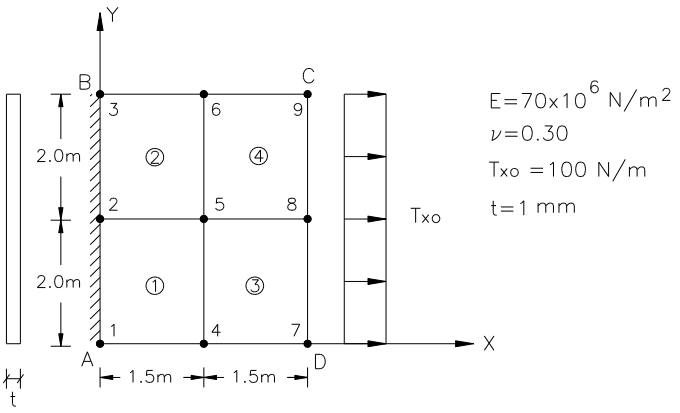


Fig.e4.4.1 Placa delgada en condición de estado plano de esfuerzos.

Este problema fue resuelto con el programa **eptd** desarrollado por el autor. Se asume que la placa está en la condición de estado plano de tensiones. El vector de cargas nodales equivalentes se construyó de acuerdo con las ecs.(4.119a) y (4.119b), donde, en este caso, tanto para el elemento 3 como para el elemento 4, $T_{xo} = T_{x2} = T_{x3}$ y, por lo tanto, los únicos coeficientes distintos de cero del vector global de cargas nodales equivalentes son: $f_{7x} = f_{9x} = 100\,\mathrm{N}$ y $f_{8x} = 200\,\mathrm{N}$. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

```
                    ***************************
                    **    DATOS GENERALES    **
                    ***************************

NUMERO DE NODOS...........................(NN).......=     9
NUMERO DE ELEMENTOS.......................(NE).......=     4
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NODO.....(NGLN1)....=     2
NUMERO DE COORDENADAS POR NODO............(NCOPN)....=     2
NUMERO DE NODOS PRESCRITOS................(NNDP1)....=     3
NUMERO DE NODOS CARGADOS..................(NNC)......=     3
INDICE DE ELASTICIDAD PLANA:....(NTI:1/2 ; EPT/EPD)..=     1
NUMERO DE MATERIALES......................(NMAT1)....=     1
INDICE DE UNIDADES.......(INDU : 1/2 ; SIU/INGLES)...=     1
INDICE DE SIMETRIA.....(IAX : 0/1 ; PLANO/AXISIM)....=     0

              ************************************
              *     COORDENADAS DE LOS NODOS     *
              ************************************
              NODO          COOR. X          COOR.Y
               1        0.00000E+00    0.00000E+00
               2        0.00000E+00    0.20000E+01
               3        0.00000E+00    0.40000E+01
               4        0.15000E+01    0.00000E+00
               5        0.15000E+01    0.20000E+01
               6        0.15000E+01    0.40000E+01
               7        0.30000E+01    0.00000E+00
               8        0.30000E+01    0.20000E+01
               9        0.30000E+01    0.40000E+01

*********************************************************************
*ELEMENTO   TIPO  DE    TIPO  DE                  INCIDENCIAS        *
*           ELEMENTO   MATERIAL               NODOS CONCURRENTES     *
*********************************************************************
      1           2          1                      1   4   5   2
      2           2          1                      2   5   6   3
      3           2          1                      4   7   8   5
      4           2          1                      5   8   9   6
```

```
**************************
*  SEMIANHO DE BANDA :  10 *
**************************
```

CONDICIONES DE CONTORNO

NODO	DIRE.1	DIRE.2
1	0.000E+00	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00
3	0.000E+00	0.000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMER0.....= 1

PROPIEDADES MECANICAS :

ESPESOR DEL ELEMENTO.....(ES).....=	0.100000E-02
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E).....=	0.700000E+08
COEFICIENTE DE POISSON.....(POIS)....=	0.300000E+00

CARGAS EN LOS NODOS

NODO	CAR.1	CAR.2
7	0.100E+03	0.000E+00
8	0.200E+03	0.000E+00
9	0.100E+03	0.000E+00

RESULTADOS

NODO	DESPL.X [MTS]	DESPL.Y [MTS]	SXX [MPA]	SYY [MPA]	SXY [MPA]
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10000E+06	0.16108E+05	0.55840E+04
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10000E+06	0.16108E+05	-0.11823E-10
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10000E+06	0.16108E+05	-0.55840E+04
4	0.21537E-02	0.79383E-03	0.10000E+06	0.79521E+04	0.21762E+04
5	0.19249E-02	-0.48890E-18	0.10000E+06	0.79521E+04	-0.10573E-10
6	0.21537E-02	-0.79383E-03	0.10000E+06	0.79521E+04	-0.21762E+04
7	0.42527E-02	0.93211E-03	0.10000E+06	-0.20394E+03	-0.12315E+04
8	0.41142E-02	0.10555E-18	0.10000E+06	-0.20394E+03	-0.93223E-11
9	0.42527E-02	-0.93211E-03	0.10000E+06	-0.20394E+03	0.12315E+04

REACCIONES DE APOYO

NODO	REACC 1	REACC 2
1	-106.5287	-23.8562
2	-186.9426	0.0000
3	-106.5287	23.8562

Nótese que $U_4 = U_6$; $V_4 = -V_6$; $U_7 = U_9$ y $V_7 = -V_9$; es decir, la solución es simétrica alrededor de la línea horizontal central, tal cual lo prevee la solución exacta. El esfuerzo normal también coincide con la solución exacta $\sigma = P/A_X$.

4.13.3.- Ejemplo 4.5. Placa delgada sometida a una compresión uniforme

Se desea determinar el campo de los desplazamientos y los esfuerzos en una placa delgada, situada entre dos paredes rígidas, y sometida a un estado de compresión uniforme δ, tal como se muestra en la Fig.e4.5.1a.

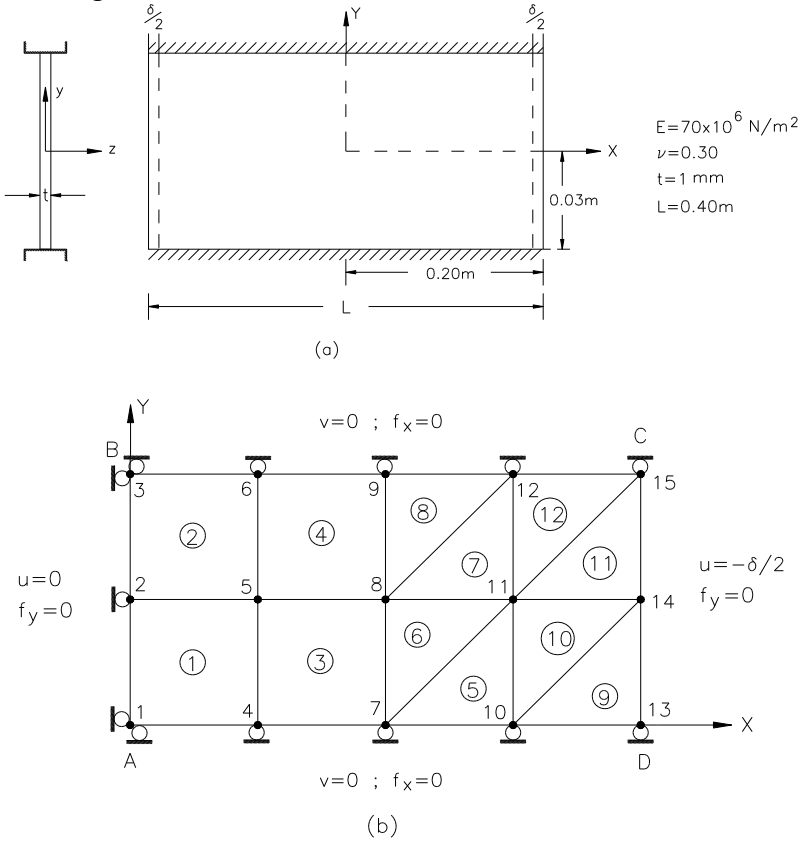


Fig.e4.5.1 Placa delgada sometida a una compresión uniforme. (a) Geometría del dominio; (b) Discretización del cuadrante de la placa a analizar y condiciones de contorno

La discretización empleada se muestra en la Fig.e4.5.1b, y tiene como finalidad ilustrar la capacidad del programa **eptd**, en lo que se refiere a la posibilidad de acoplamiento de diferentes tipos de elementos (siempre que la compatibilidad entre éstos sea posible), entre si. A continuación se presentan los resultados obtenidos mediante dicho programa.

```
          ***************************
          **    DATOS GENERALES    **
          ***************************

NUMERO DE NODOS.........................(NN).......=    15
NUMERO DE ELEMENTOS.....................(NE).......=    12
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NODO.....(NGLN1)....=     2
NUMERO DE COORDENADAS POR NODO............(NCOPN)....=     2
NUMERO DE NODOS PRESCRITOS................(NNDP1)....=    12
NUMERO DE NODOS CARGADOS..................(NNC).....=     0
INDICE DE ELASTICIDAD PLANA:....(NTI:1/2 ; EPT/EPD)..=     1
NUMERO DE MATERIALES.....................(NMAT1)....=     1
INDICE DE UNIDADES.......(INDU : 1/2 ; SIU/INGLES)...=     1
INDICE DE SIMETRIA.....(IAX : 0/1 ; PLANO/AXISIM)....=     0
```

```
************************************
*     COORDENADAS DE LOS NODOS     *
************************************
NODO         COOR. X         COOR.Y
  1       0.00000E+00    0.00000E+00
  2       0.00000E+00    0.15000E-01
  3       0.00000E+00    0.30000E-01
  4       0.50000E-01    0.00000E+00
  5       0.50000E-01    0.15000E-01
  6       0.50000E-01    0.30000E-01
  7       0.10000E+00    0.00000E+00
  8       0.10000E+00    0.15000E-01
  9       0.10000E+00    0.30000E-01
 10       0.15000E+00    0.00000E+00
 11       0.15000E+00    0.15000E-01
 12       0.15000E+00    0.30000E-01
 13       0.20000E+00    0.00000E+00
 14       0.20000E+00    0.15000E-01
 15       0.20000E+00    0.30000E-01
```

*ELEMENTO	TIPO DE ELEMENTO	TIPO DE MATERIAL	INCIDENCIAS NODOS CONCURRENTES
1	2	1	1 4 5 2
2	2	1	2 5 6 3
3	2	1	4 7 8 5
4	2	1	5 8 9 6
5	1	1	7 10 11
6	1	1	7 11 8
7	1	1	8 11 12
8	1	1	8 12 9
9	1	1	10 13 14
10	1	1	10 14 11
11	1	1	11 14 15
12	1	1	11 15 12

```
*****************************
*  SEMIANHO DE BANDA :  10 *
*****************************

                ********************************
                *    CONDICIONES DE CONTORNO    *
                ********************************
                NODO      DIRE.1           DIRE.2
                  1     0.000E+00        0.000E+00
                  2     0.000E+00        0.200E+03
                  3     0.000E+00        0.000E+00
                  4     0.200E+03        0.000E+00
                  6     0.200E+03        0.000E+00
                  7     0.200E+03        0.000E+00
                  9     0.200E+03        0.000E+00
                 10     0.200E+03        0.000E+00
                 12     0.200E+03        0.000E+00
                 13    -0.300E-02        0.000E+00
                 14    -0.300E-02        0.000E+00
                 15    -0.300E-02        0.000E+00


   ***************************************************
   *     PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMER0......= 1     *
   ***************************************************
PROPIEDADES MECANICAS :
---------------------
ESPESOR DEL ELEMENTO.............(ES)......=   0.100000E-02
MODULO DE ELASTICIDAD............(E).......=   0.700000E+08
COEFICIENTE DE POISSON...........(POIS)....=   0.300000E+00
```

```
*********************************************
***                RESULTADOS                 ***
*********************************************
```

NODO	DESPL.X [MTS]	DESPL.Y [MTS]	SXX [MPA]	SYY [MPA]	SXY [MPA]
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.16081E-09
2	0.00000E+00	-0.23695E-19	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.15495E-09
3	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.14910E-09
4	-0.75000E-03	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.13383E-09
5	-0.75000E-03	0.37694E-20	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.24228E-09
6	-0.75000E-03	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.35072E-09
7	-0.15000E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	0.48449E-09
8	-0.15000E-02	-0.13269E-19	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.15592E-09
9	-0.15000E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.49445E-09
10	-0.22500E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	0.46448E-09
11	-0.22500E-02	-0.19608E-19	-0.11538E+07	-0.34615E+06	0.18909E-09
12	-0.22500E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.52887E-09
13	-0.30000E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	0.44565E-10
14	-0.30000E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	0.25628E-09
15	-0.30000E-02	0.00000E+00	-0.11538E+07	-0.34615E+06	-0.26523E-09

```
**********************
* REACCIONES DE APOYO *
**********************
```

NODO	REACC 1	REACC 2
1	8.6538	8.6538
2	17.3077	0.0000
3	8.6538	-8.6538
4	0.0000	17.3077
6	0.0000	-17.3077
7	0.0000	17.3077
9	0.0000	-17.3077
10	0.0000	17.3077
12	0.0000	-17.3077
13	-8.6538	8.6538
14	-17.3077	0.0000
15	-8.6538	-8.6538

La solución exacta de este problema es:

$$u = \frac{\delta}{L}x \qquad\qquad v = 0$$

$$\sigma_x = -\frac{E\delta}{(1-\nu^2)L} \qquad\qquad \sigma_y = -\frac{\nu E\delta}{(1-\nu^2)L} \qquad\qquad \tau_{xy} = 0$$

Como puede notarse, los resultados numéricos coinciden con la solución exacta.

4.13.4.- Ejemplo 4.6. Cilindro sometido a presión interna: solución bidimensional

Considérese un envase de presión cilíndrico largo de acero, sometido a una presión interna igual a 2 Mpa, el cual se muestra en la Fig.e4.6.1. Los radios interno y externo del cilindro son 0.040 m y 0.060 m, respectivamente. El módulo de Elasticidad del acero es $E = 200\times10^9$ GPa y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.30$. Se desea determinar el campo de los desplazamientos en el cilindro.

A pesar que este es un problema axisimétrico puede, sin embargo, resolverse considerando cualquier sección transversal del cilindro, tal como la mostrada en la Fig.4.5.a, bajo la suposición de un estado plano de deformaciones.

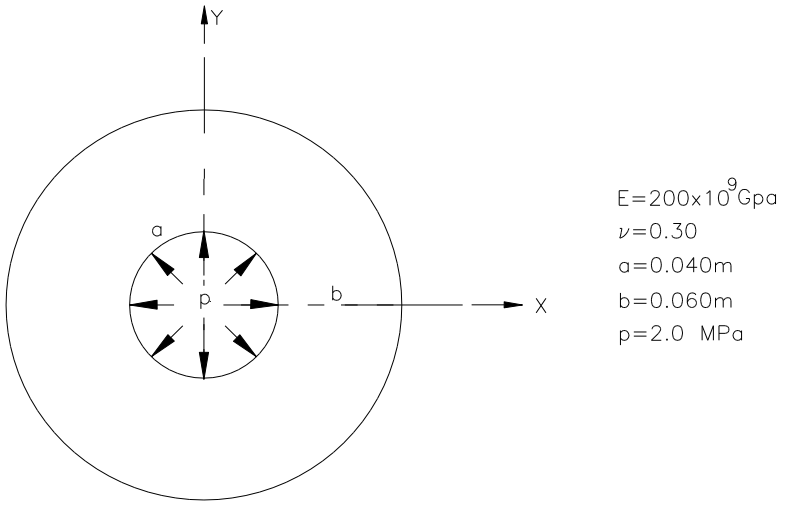


Fig.e4.6.1 Dominio de una sección de un cilindro en estado plano de deformación.

Debido a la simetría del problema será necesario, únicamente, analizar un cuarto del dominio de la sección transversal. En la Fig,e4.6.2, se muestran dos discretizaciones, uniformes, y equivalentes, utilizadas en la solución de este problema. La primera consiste en una malla de elementos triangulares lineales, la segunda está formada por elementos isoparamétricos lineales. Así mismo, en dicha figura se muestran las condiciones de contorno asociadas al hecho de hacer uso de la condición simétrica del problema; es decir:

$$V_1 = V_6 = V_{11} = V_{16} = V_{21} = 0.0 \qquad U_5 = U_{10} = U_{15} = U_{20} = U_{25} = 0.0$$

Puesto que en las dos discretizaciones propuestas los elementos son lineales, el vector de cargas nodales equivalente es el mismo en ambos casos, y se determina particularizando la ec.(4.110); es decir:

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{S_1} \Psi_i p dS_1 = \int_0^{he} \Psi_i p ds = \frac{phe}{2} \qquad \text{(a)}$$

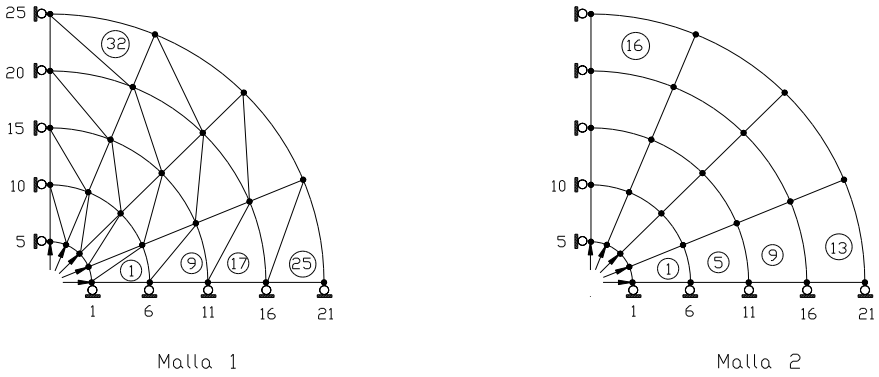


Fig.e4.6.2 Discretización del cuadrante de la sección transversal

donde $he = \pi a/8$. Esta ecuación representa la contribución de la presión (fuerza normal; es decir, fuerza a lo largo de la dirección radial), a los nodos de los elementos que están situados en el contorno interno donde actúa la presión. Luego, el vector de cargas nodales equivalente en cada elemento de dicho contorno, será igual a:

$$\left\{f_i^{(1)}\right\} = \frac{\pi a p}{16}\left\{\cos 0^o \quad sen0^o \quad \cos 22.5^o \quad sen22.5^o\right\}^T \tag{b1}$$

$$\left\{f_i^{(2)}\right\} = \frac{\pi a p}{16}\left\{\cos 22.5^o \quad sen22.5^o \quad \cos 45^o \quad sen45^o\right\}^T \tag{b2}$$

$$\left\{f_i^{(3)}\right\} = \frac{\pi a p}{16}\left\{\cos 45^o \quad sen45^o \quad \cos 67.5^0 \quad sen67.5^o\right\}^T \tag{b3}$$

$$\left\{f_i^{(4)}\right\} = \frac{\pi a p}{16}\left\{\cos 67.5^o \quad sen67.5^o \quad \cos 90^o \quad sen90^o\right\}^T \tag{b4}$$

La solución exacta de este problema se conoce y viene dada por:

$$u_r = \frac{a^2 p\, r}{E\left(b^2 - a^2\right)}\left[(1-\nu)+(1+\nu)\frac{b^2}{r^2}\right] \tag{c}$$

La solución de este problema se obtuvo, de nuevo, con el programa **eptd**. En la Fig.e4.6.3 se compara la solución exacta de los desplazamientos $u(x,0)$ con las soluciones aproximadas asociadas a las dos mallas propuestas. Como se puede observar, a pesar de que las mallas son relativamente gruesas, las soluciones aproximadas están bien próximas de la solución exacta.

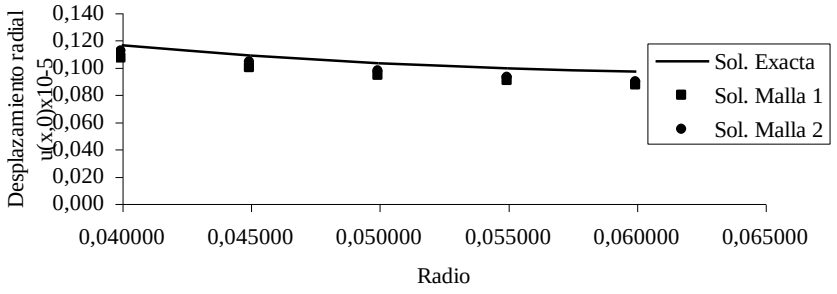


Fig.e4.6.3 Comparación de los desplazamientos u(x,0) de la solución bidimensional.

En la Fig.e4.6.4 se comparan los esfuerzos normales σ_{xx} sobre el eje x. De la solución exacta se nota que puesto que $b^2/r^2 \geq 1$, σ_{rr} es negativo para todos los r, excepto para $r = b$, en cuyo caso $\sigma_{rr} = 0$. Como puede observarse en la mencionada figura, lo grueso de las mallas

impiden una aproximación satisfactoria en la vecindad de los contornos. Una malla mas refinada en esas zonas, lograría una mejor aproximación de la solución exacta de esta variable.

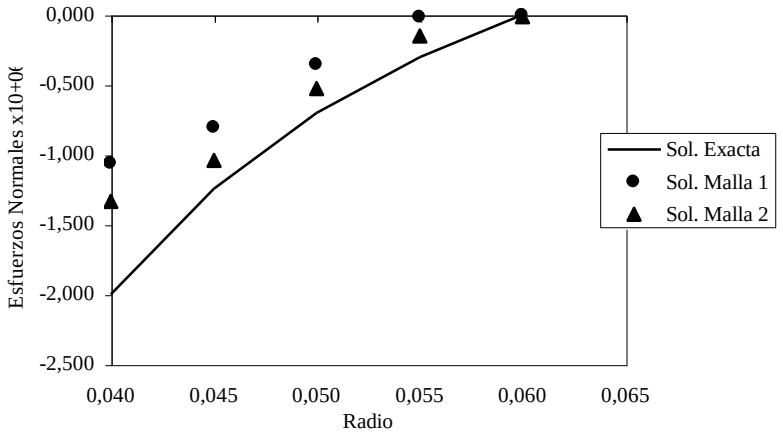


Fig.e4.6.4 Comparación de los esfuerzos normales en (x,0).

4.13.5.- Ejemplo 4.7. Cilindro sometido a presión: solución axisimétrica

En la Fig.e4.7.1a se muestra un corte longitudinal del cilindro analizado en el ejemplo anterior. Se desea, ahora, determinar el campo de los desplazamientos y el estado de esfuerzos que se genera en el cilindro debido a la presión interna. Se resolverá el problema considerando la simetría axial del mismo. Para la solución axisimétrica de este problema, se proponen las tres discretizaciones mostradas: la malla de la Fig.e4.7.1b, está formada de elementos triangulares lineales y la de la Fig.e4.7.1c, está compuesta de elementos isoparamétricos rectangulares lineales.

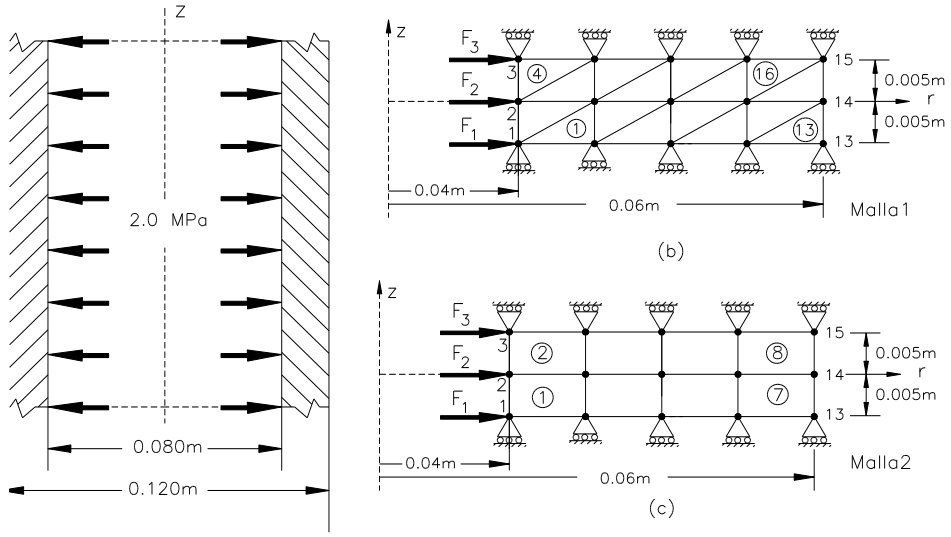


Fig.e4.7.1 Cilindro sometido a presión interna. (a) Corte longitudinal; (b) malla de elementos triangulares; (c) malla de elementos rectangulares.

Las ecuaciones de los elementos que gobiernan la solución axisimétrica de este problema, son las que forman el sistema de ecs.(107). Asociada a la dirección radial, el vector de cargas nodales equivalentes de dicho sistema es:

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = 2\pi\int_A r\,\Psi_i\,\overline{F}_r\,dA + 2\pi\int_{S_1} r\,\Psi_i\,\overline{T}_r\,dS_1 + \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_{ri} \qquad (a)$$

de modo que, puesto que en este problema solamente actúa la presión, el respectivo vector de cargas nodales equivalentes $\left\{f_i^{(e)}\right\} = \{F_1 \quad F_2\}^T$ de cada elemento situado en el contorno, vendrá dado por:

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = 2\pi\int_{S_1} r\,\Psi_i\,\overline{T}_r\,dS_1 \qquad (b)$$

el cual se evalúa siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.12. Así, es fácil verificar que:

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\pi r a h e P}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} = \frac{2\pi(0.04)(0.005)2\times10^6}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} = 1256.64\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} N$$

donde a es el radio interno del cilindro, he es la distancia vertical sobre el eje z y P es la presión interna. La solución exacta del desplazamiento radial u_r, el esfuerzo normal en la dirección radial σ_{rr}, y el esfuerzo circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ vienen dados, respectivamente, por:

$$u_r = \frac{a^2 p\, r}{E\left(b^2 - a^2\right)}\left[(1-\nu)+(1+\nu)\frac{b^2}{r^2}\right] \qquad (c1)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (c2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (c3)$$

En la Fig.e4.7.2 se comparan los desplazamientos nodales en el cilindro, entre la solución exacta y la solución aproximada de las dos mallas utilizadas. Aun cuando las mallas son verdaderamente gruesas, nótese que esta solución es superior a la solución bidimensional.

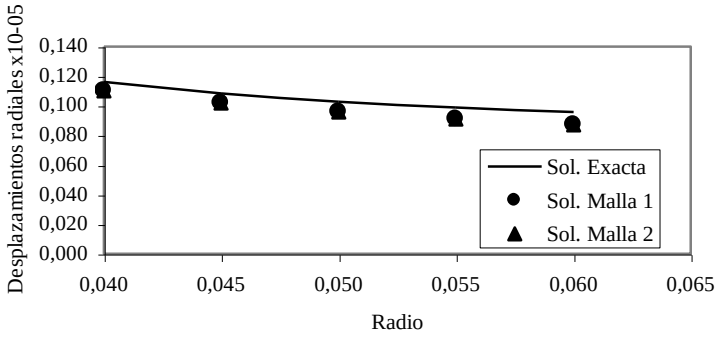


Fig.e4.7.2 Comparación de los desplazamientos radiales.

En la Fig.e.4.7.3 se ha graficado los esfuerzos normales obtenidos con las mallas propuestas y la solución exacta. De nuevo es importante notar que debido a lo grueso de la malla, salvo en los contornos, las soluciones aproximadas se comparan bien con la solución exacta.

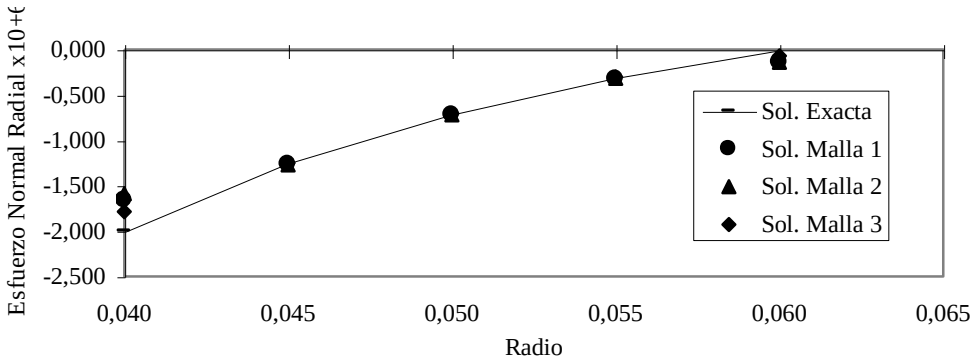


Fig.4.7.3 Comparación de los esfuerzos radiales.

Por último en la Fig.e4.7.4, se han graficado las soluciones correspondientes a los esfuerzos circunferenciales.

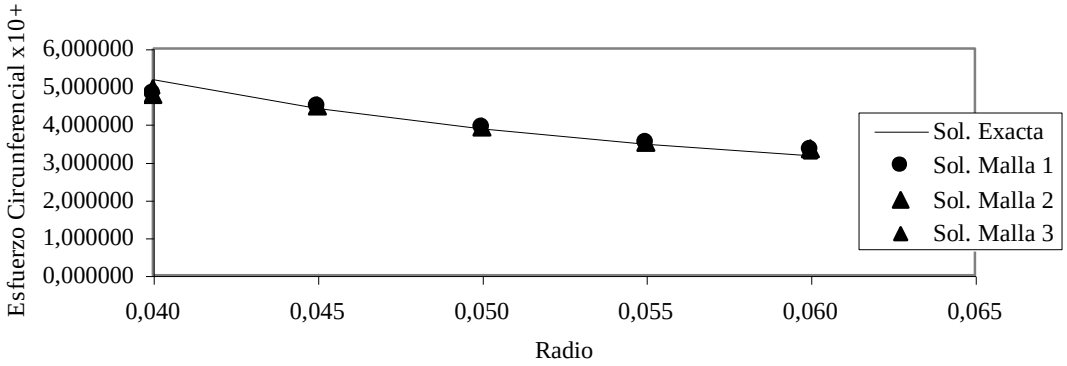


Fig.e4.7.4 Comparación de los desplazamientos circunferenciales.

V.- PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR

5.1.- Introducción

A diferencia de los problemas abordados en los capítulos anteriores, donde las incógnitas relacionados con los mismos eran cantidades vectoriales, existe una gran gama de problemas donde las incógnitas son de naturaleza escalar. Ejemplos, entre otros, de este tipo de problemas, son aquellos donde la temperatura, la presión y el potencial de corriente, son las variables a determinar. Estos problemas aparecen muy frecuentemente en el campo de la ingeniería, y están definidos en términos de una ecuación diferencial y condiciones de contorno del tipo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+Q-c\frac{\partial \phi}{\partial t}=0 \qquad \text{en } V \qquad (5.1a)$$

con las condiciones de contorno:

$$\phi=\bar{\phi} \qquad \text{en } S_1 \qquad (5.1b)$$

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z + q = 0 \qquad \text{en } S_2 \qquad (5.1c)$$

$$k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z + \beta\left(\phi - \phi_c\right) = 0 \qquad \text{en } S_3 \qquad (5.1d)$$

donde $S=S_1 \cup S_2 \cup S_3$, es el contorno que limita la región de volumen V, en la cual es válida la ec.(5.1a); n_x, n_y y n_z son los cosenos directores de la normal saliente al contorno S, con relación al sistema de referencia seleccionado, tal como se muestra en la Fig.5.1.

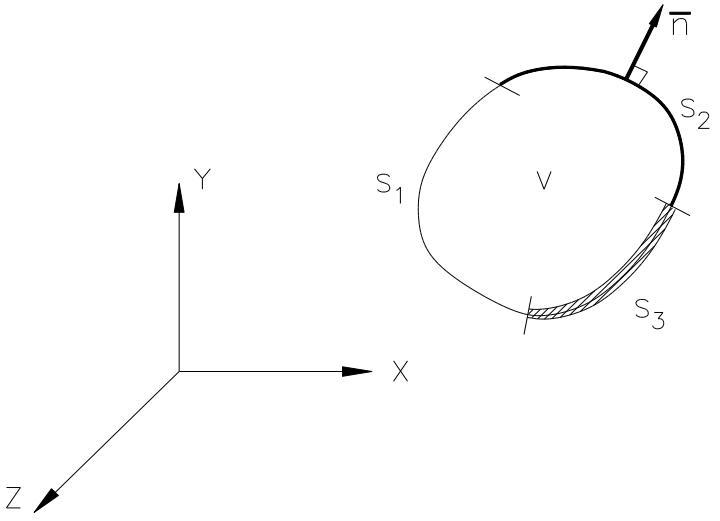


Fig.5.1 Definición del dominio y del contorno de un problema de campo escalar.

En el problema de valor de contorno anterior, ϕ es una función de la posición; es decir, $\phi=\phi(x,y,z)$, y $k_x, k_y, k_z, Q, \beta, \phi_c, q$ y c, son funciones especificadas las cuales pueden variar de punto a punto sobre la región del problema, y t es el tiempo. Cuando se le asigna el respectivo sentido físico a cada una de las variables del sistema de ecuaciones anterior, éstas pueden utilizarse en la solución de los siguientes tipos de problemas:

- Conducción de calor.
- Torsión de barras prismáticas.
- Difusión de flujos en medios porosos.
- Lubricación.
- Campos magnetostáticos.
- Campos electrostáticos.
- Campos gravitacionales.
- Movimiento irrotacional de fluidos perfectos.
- Corriente eléctrica directa

5.2.- Problemas tridimensionales

La discretización del sistema de ecs.(5.1) se puede obtener mediante el establecimiento de un funcional tal, que la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente sea la ecuación diferencial (5.1a), y las condiciones de contorno asociadas a dicho funcional sean las ecs.(5.1b) y (5.1c). En efecto, considérese el siguiente funcional:

$$I=\int_V \frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2-2\left(Q-c\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\phi\right]dV \; + \int_{S_2} q\phi\, dS_2 + \int_{S_3}\frac{1}{2}\beta\left(\phi-\phi_c\right)^2 dS_3 \qquad (5.2)$$

La primera variación de este funcional para un instante de tiempo dado, viene dada por:

$$\delta I=\int_V \left[k_x\phi_{,x}\delta\phi_{,x}+k_y\phi_{,y}\delta\phi_{,y}+k_z\phi_{,z}\delta\phi_{,z}-\left(Q-c\phi_{,t}\right)\delta\phi\right]dV \; + \int_{S_2} q\delta\phi\, dS_2+\int_{S_3}\beta\left(\phi-\phi_c\right)\delta\phi\, dS_3 = 0 \qquad (5.3)$$

Integrando por partes los primeros tres términos de la primera integral de la ecuación anterior se obtiene:

$$-\int_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\phi_{,x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\phi_{,y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\phi_{,z}\right)+\left(Q-c\phi_{,t}\right)\right]\delta\phi\, dV \; + \int_{S_1}\left(k_x\phi_{,x}n_x+k_y\phi_{,y}n_y+k_z\phi_{,z}n_z\right)\delta\phi\, dS_1 \; +$$

$$\int_{S_2} q\delta\phi\, dS_2 + \int_{S_3} \beta(\phi-\phi_c)\delta\phi\, dS_3 = 0$$

es decir:

$$-\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(k_x\phi_{,x})+\frac{\partial}{\partial y}(k_y\phi_{,y})+\frac{\partial}{\partial z}(k_z\phi_{,z})+(Q-c\phi_{,t})\right]\delta\phi\, dV +$$

$$\int_{S_1}(k_x\phi_{,x}n_x+k_y\phi_{,y}n_y+k_z\phi_{,z}n_z)\delta\phi\, dS_1 +$$

$$\int_{S_2}[k_x\phi_{,x}n_x+k_y\phi_{,y}n_y+k_z\phi_{,z}n_z+q]\delta\phi\, dS_2 +$$

$$\int_{S_3}[k_x\phi_{,x}n_x+k_y\phi_{,y}n_y+k_z\phi_{,z}n_z+\beta(\phi-\phi_c)]\delta\phi\, dS_3 = 0 \quad (5.4)$$

De la ecuación anterior se concluye que la condición necesaria para el mínimo de este funcional es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+Q-c\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

sobre la región de volumen V, con las condiciones de contorno:

$$\phi=\bar{\phi} \qquad \text{en } S_1$$

$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z+q=0 \qquad \text{en } S_2$$

$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z+\beta(\phi-\phi_c)=0 \qquad \text{en } S_3$$

que es, precisamente el problema de valor de contorno dado por las ecs.(5.1). Nótese lo siguiente: (a) Sobre el contorno S_1, la variación de ϕ, $\delta\phi$, es cero ya que ϕ es conocida en esta parte del contorno. (b) La ecuación sobre S_2 y S_3 es la condición natural de contorno del problema.

De lo anterior se deduce que aquella función $\tilde{\phi}$ que minimice la ec.(5.2), verifica, también, la ec.(5.1a). Luego, de acuerdo a nivel de cada elemento (e), el **mef** propone la aproximación de la función ϕ mediante la siguiente relación:

$$\overset{(e)}{\phi}=\Psi_j(\bar{x})\ \phi_j(t) \qquad ; \qquad j = 1,2,.....,r \qquad (5.5)$$

donde r es el número de nodos por elemento: Luego, de acuerdo con la ec.(4.41):

$$I(\phi)=\sum_{e=1}^{M}\overset{(e)}{I}(\phi)$$

donde $\overset{(e)}{I}(\phi)$ no es otra cosa que la ec.(5.2) evaluada a nivel de cada elemento, luego:

$$\overset{(e)}{I}=\int_V \frac{1}{2}\left[k_x\left(\Psi_{j,x}\phi_j\right)^2+k_y\left(\Psi_{j,y}\phi_j\right)^2+k_z\left(\Psi_{j,z}\phi_j\right)^2-2\left(Q-c\Psi_j\dot{\phi}_j\right)\Psi_j\phi_j\right]dV_e + \int_{S_2^{(e)}} q\Psi_j\phi_j dS_2^{(e)} + \int_{S_3^{(e)}} \frac{1}{2}\beta\left(\Psi_j\phi_j-\phi_c^{(e)}\right)^2 dS_3^{(e)} \qquad (5.6)$$

donde $\dot{\phi}_j=\partial\phi_j/\partial t$. Entonces de acuerdo con la ec.(4.43):

$$\frac{\partial \overset{(e)}{I}}{\partial\phi_i}=0$$

se tiene:

$$\frac{\partial \overset{(e)}{I}}{\partial\phi_i}=\int_V\left[k_x\Psi_{j,x}\phi_j\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\Psi_{j,x}\phi_j\right)+k_y\Psi_{j,y}\phi_j\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\Psi_{j,y}\phi_j\right)+k_z\Psi_{j,z}\phi_j\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\Psi_{j,z}\phi_j\right)-\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(Q-c\Psi_j\dot{\phi}_j\right)\Psi_j\phi_j\right]dV_e+\int_{S_2^{(e)}} q\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\Psi_j\phi_j\right)dS_2^{(e)} + \int_{S_3^{(e)}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\phi_i}\beta\left(\Psi_j\phi_j-\overset{(e)}{\phi_c}\right)^2 dS_3^{(e)}=0 \qquad (5.7)$$

Notando, de nuevo, que: $\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\Psi_j\phi_j\right)=\psi_i$ y $\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\Psi_{j,x}\phi_j\right)=\Psi_{i,x}$, la ecuación anterior se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\overset{(e)}{k_{ij}}\right]\left\{\overset{(e)}{\phi_j}\right\}+\left[\overset{(e)}{p_{ij}}\right]\left\{\overset{(e)}{\dot{\phi}_j}\right\}+\left\{\overset{(e)}{f_i}\right\}=0 \qquad (5.8)$$

donde:

$$\left[\overset{(e)}{k_{ij}}\right]=\int_{V_e}\left(k_x\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+k_y\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}+k_z\Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)dV_e+\int_{S_3^{(e)}}\beta\Psi_i\Psi_j dS_3^{(e)} \qquad (5.9a)$$

$$\left[\overset{(e)}{p_{ij}}\right]=\int_{V_e} c\Psi_i\Psi_j dV_e \qquad (5.9b)$$

$$\left\{\overset{(e)}{f_i}\right\}=-\int_{V_e} Q\Psi_i dV_e+\int_{S_2^{(e)}} q\Psi_i dS_2^{(e)}-\int_{S_3^{(e)}}\beta\phi_c^{(e)}\Psi_i dS_3^{(e)} \qquad (5.9c)$$

Es importante hacer notar, una vez mas, que la deducción del sistema de ecuaciones anterior, es independiente del tipo de elemento finito (y por lo tanto independiente de las funciones de interpolación), seleccionado. Una vez decidido el elemento a usar, se podrá

determinar, a nivel de cada elemento, los coeficientes k_{ij}, p_{ij} y f_i y una vez ensamblados todos los elementos, se obtendrá el sistema global de ecuaciones, el cual se puede escribir en la forma:

$$\left[K_{IJ}\right]\left\{\Phi_J\right\}+\left[P_{IJ}\right]\left\{\dot{\Phi}_J\right\}+\left\{F_I\right\}=0 \tag{5.10}$$

donde:

$$\left[K_{IJ}\right]=\sum_{e=1}^{M}\left[k_{ij}\right]^{(e)} \quad ; \quad \left[P_{IJ}\right]=\sum_{e=1}^{M}\left[p_{ij}\right]^{(e)} \; ; \quad \left\{F_I\right\}=\sum_{e=1}^{M}\left\{f_i\right\}^{(e)} \tag{5.11}$$

5.3.- Discretización en el tiempo

Puesto que las condiciones iniciales; es decir, para el instante de tiempo t=0, son conocidas, una manera de reducir el sistema de ecuaciones diferenciales, en el tiempo, a un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas (lineales o no lineales, dependiendo de la naturaleza de k_γ, β, q y c), es a través del concepto de diferencias finitas. En efecto, conocido el valor de una función (en este caso ϕ), en un instante de tiempo t y $t+\Delta t$, es posible calcular su valor y el de su derivada en $t+\Delta t/2$, del siguiente modo:

$$\left\{\Phi_{t+\Delta t/2}\right\}=\frac{\left\{\Phi_t\right\}+\left\{\Phi_{t+\Delta t}\right\}}{2} \tag{5.12}$$

$$\left\{\dot{\Phi}_{t+\Delta t/2}\right\}=\frac{\left\{\Phi_{t+\Delta t}\right\}-\left\{\Phi_t\right\}}{\Delta t} \tag{5.13}$$

Sustituyendo las ecs.(5.12) y (5.13) en la ec.(5.10), y omitiendo por comodidad en la notación los subíndices, se obtiene:

$$[K]\left\{\frac{\left\{\Phi_t\right\}+\left\{\Phi_{t+\Delta t}\right\}}{2}\right\}+[P]\left\{\frac{\left\{\Phi_{t+\Delta t}\right\}-\left\{\Phi_t\right\}}{\Delta t}\right\}+\left\{\frac{\left\{F_t\right\}+\left\{F_{+\Delta t}\right\}}{2}\right\}=0 \tag{5.14}$$

después de agrupar los términos correspondientes, se llega a:

$$\left[\frac{[K]}{2}+\frac{[P]}{\Delta t}\right]\left\{\Phi_{t+\Delta t}\right\}=-\left[\frac{[K]}{2}-\frac{[P]}{\Delta t}\right]\left\{\Phi_t\right\}-\left\{\frac{\left\{F_t\right\}+\left\{F_{t+\Delta t}\right\}}{2}\right\} \tag{5.15}$$

Una vez introducidas las condiciones iniciales y las condiciones de contorno, el sistema anterior puede ser resuelto para cada instante de tiempo.

5.4.- Problemas axisimétricos

En el caso de problemas con simetría axial alrededor del eje *z*, las ecs.(5.1) en coordenadas cilíndricas, vienen dadas por:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+Q-c\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad \text{en } V \qquad (5.16a)$$

con las condiciones de contorno:

$$\phi=\bar{\phi} \qquad \text{en } S_1 \qquad (5.16b)$$

$$k_r\frac{\partial\phi}{\partial r}n_r+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z+q=0 \qquad \text{en } S_2 \qquad (5.16c)$$

$$k_r\frac{\partial\phi}{\partial r}n_r+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z+\beta(\phi-\phi_c)=0 \qquad \text{en } S_3 \qquad (5.16d)$$

Como puede apreciarse este es un problema bidimensional. En este caso, a nivel de cada elemento, el funcional asociado a este tipo de problemas será:

$$I^{(e)}=\int_{A^{(e)}}\frac{1}{2}\left[k_r\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2-2\left(Q-c\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\phi\right]2\pi r\,dr\,dz+$$
$$\int_{S_2}2\pi rq\phi\,dS_2+\int_{S_3}\frac{1}{2}\beta(\phi-\phi_c)^2\,2\pi r\,dS_3 \qquad (5.17)$$

De nuevo, de acuerdo con la ec.(4.41), es decir, evaluando, a nivel de cada elemento $\partial I^{(e)}/\partial\phi_i=0$, se obtiene un sistema de ecuaciones similar al dado por la ec.(5.10), donde ahora:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]=\int_{A^{(e)}}r\left(k_r\Psi_{i,r}\Psi_{j,r}+k_z\Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)dr\,dz+\int_{S_3}r\beta\Psi_i\Psi_j\,dS_3^{(e)} \qquad (5.18a)$$

$$\left[p_{ij}^{(e)}\right]=\int_{A^{(e)}}r\Psi_i\Psi_j\,dr\,dz \qquad (5.18b)$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\}=-\int_{A^{(e)}}rQ\Psi_i\,dr\,dz+\int_{S_2^{(e)}}rq\Psi_i\,dS_2-\int_{S_3^{(e)}}r\beta\phi_c^{(e)}\Psi_i\,dS_3 \qquad (5.18c)$$

El proceso de ensamblaje y la discretización en el tiempo sigue los mismos pasos descritos en las secciones anteriores.

5.5.- Conducción de calor

Cuando se utiliza las ecs.(5.1) en la solución de problemas del área de transferencia de calor, las variables involucradas en la referida ecuación, adquieren el siguiente significado: ϕ representa la temperatura T; k_x, k_y y k_z son las conductividades térmicas en las direcciones *x, y,* y *z*, respectivamente; Q es la generación de calor por unidad de volumen, c es el calor específico; q representa el flujo de calor prescrito por unidad de área sobre el contorno S_2; β y $\phi_c^{(e)}$ son el

coeficiente de transferencia de calor por convección h, y la temperatura T_∞ del fluido que rodea el cuerpo sobre el contorno S_3; es decir, el problema de valor de contorno toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q-c\frac{\partial T}{\partial t}=0 \qquad \text{en } V \qquad (5.19a)$$

con las condiciones de contorno:

$$T=\overline{T} \qquad \text{en } S_1 \qquad (5.19b)$$

$$k_x\frac{\partial T}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial T}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial T}{\partial z}n_z+q=0 \qquad \text{en } S_2 \qquad (5.19c)$$

$$k_x\frac{\partial T}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial T}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial T}{\partial z}n_z+h\left(T-T_\infty\right)=0 \qquad \text{en } S_3 \qquad (5.19d)$$

En la Fig.5.2 se muestran las condiciones de contorno (esenciales y naturales), asociadas a un problema de esta naturaleza.

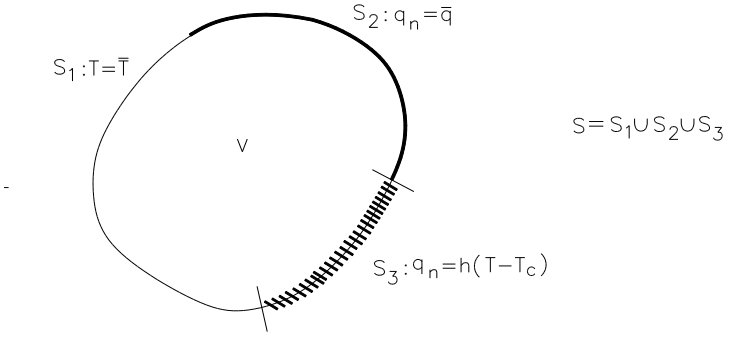


Fig.5.2 Condiciones de contorno de un problema bidimensional de conducción de calor.

Luego, el respectivo sistema local de ecuaciones de elementos finitos toma la forma:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{T_j^{(e)}\right\}+\left[p_{ij}^{(e)}\right]\left\{\dot{T}_j^{(e)}\right\}+\left\{f_i^{(e)}\right\}=0 \qquad (5.20)$$

donde, para el caso tridimensional:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]=\int_{V_e}\left(k_x\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+k_y\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}+k_z\Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)dV_e+\int_{S_3^{(e)}}h\Psi_i\Psi_j dS_3^{(e)} \qquad (5.21a)$$

$$\left[p_{ij}^{(e)}\right]=\int_{V_e}c\Psi_i\Psi_j dV_e \qquad (5.21b)$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = -\int_{V_e} Q\Psi_i dV_e + \int_{S_2^{(e)}} q\Psi_i dS_2^{(e)} - \int_{S_3^{(e)}} hT_\infty \Psi_i dS_3^{(e)} \tag{5.21c}$$

y para el caso axisimétrico:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A^{(e)}} r\left(k_r \Psi_{i,r} \Psi_{j,r} + k_z \Psi_{i,z} \Psi_{j,z}\right) dr dz + \int_{S_3} rh\Psi_i \Psi_j dS_3^{(e)} \tag{5.22a}$$

$$\left[p_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A^{(e)}} r\Psi_i \Psi_j dr dz \tag{5.22b}$$

5.6.- Torsión de barras prismáticas

En la Fig.5.3 se muestra una barra prismática de sección transversal arbitraria, sometida a torsión. En la solución de este tipo de problemas, las variables de las ecs. (5.1), tienen el siguiente significado: ϕ representa la función de esfuerzo ($k_x = k_y = 1.0$); $Q = 2G\theta$ donde G es el módulo de rigidez y θ es el ángulo de giro por unidad de longitud (rad./m). Todos los demás términos son nulos. Luego, el sistema de ecuaciones resultante viene dado por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0 \qquad \text{en A} \tag{5.23a}$$

$$\phi = 0 \qquad \text{en } S_1 \tag{5.23b}$$

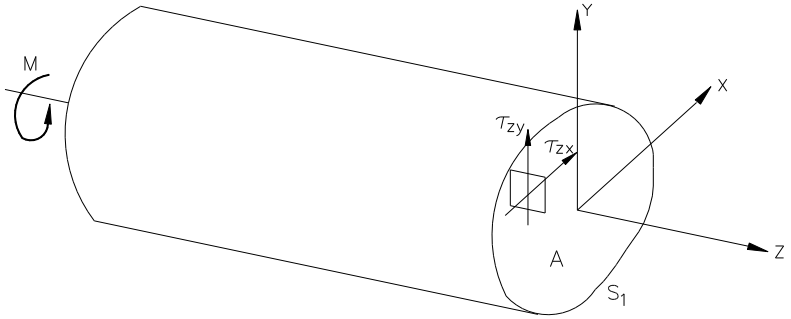


Fig.5.3 Componentes del esfuerzo en una sección transversal de una barra prismática sometida a torsión.

Una vez determinada la distribución de la función de esfuerzos, ϕ, es posible calcular las componentes del esfuerzo cortante mostradas en la Fig.5.3, a través de:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{5.24a}$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{5.24b}$$

Finalmente, el momento torsor M, se determina mediante:

$$M = \int_A \phi \, dA \tag{5.25}$$

Así, en este caso, el sistema de ecuaciones de elementos finitos, a nivel de cada elemento, se reduce a:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\} + \left\{f_i^{(e)}\right\} = 0 \tag{5.26}$$

donde, para el caso bidimensional, se tiene:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A_e} \left(\Psi_{i,x}\,\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\,\Psi_{j,y}\right) dA_e \tag{5.27a}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{A^{(e)}} 2G\theta\Psi_i \, dA_e \tag{5.27b}$$

y para el caso axisimétrico:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A_e} r\left(\Psi_{i,x}\,\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\,\Psi_{j,y}\right) dr\, dz \tag{5.28a}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{A^{(e)}} 2\,r\,G\theta\Psi_i \, dr\, dz \tag{5.28b}$$

5.7.- Flujo de fluidos a través de medios porosos

El problema del flujo de fluidos a través de medios porosos, conduce a alguna de las siguientes situaciones:

- Flujo en pozos, diques o canales.
- Análisis de acuíferos.
- Flujo a través de rocas y tierra e infiltración de represas y fundaciones.
- Flujo subterráneo de aguas servidas y dispersión de contaminantes a través de arenas y rocas.

En particular, el análisis del flujo de agua subterránea es de gran importancia, ya que en algunas regiones del planeta, el suministro de agua proviene en buena parte y, en algunos casos exclusivamente, del subsuelo. El comportamiento del agua a través de la tierra puede ser estudiado suponiendo la condición de fluido irrotacional. El flujo de un fluido irrotacional es, por supuesto, un caso ideal; es decir, una aproximación, ya que se supone que no hay fricción entre el fluido y una superficie, y que no ocurre rotación o distorsión de las partículas del fluido durante el movimiento (irrotacional). En la Fig.5.4 se muestran dos casos típicos de un problema de esta naturaleza, como lo son el flujo de fluidos en un medio poroso bajo una represa y el flujo confinado en un pozo. En ambos casos se muestran, adicionalmente, las correspondientes condiciones de contorno.

La ecuación que gobierna cualquier problema de flujo irrotacional es un caso particular de la ec.(5.1); es decir:

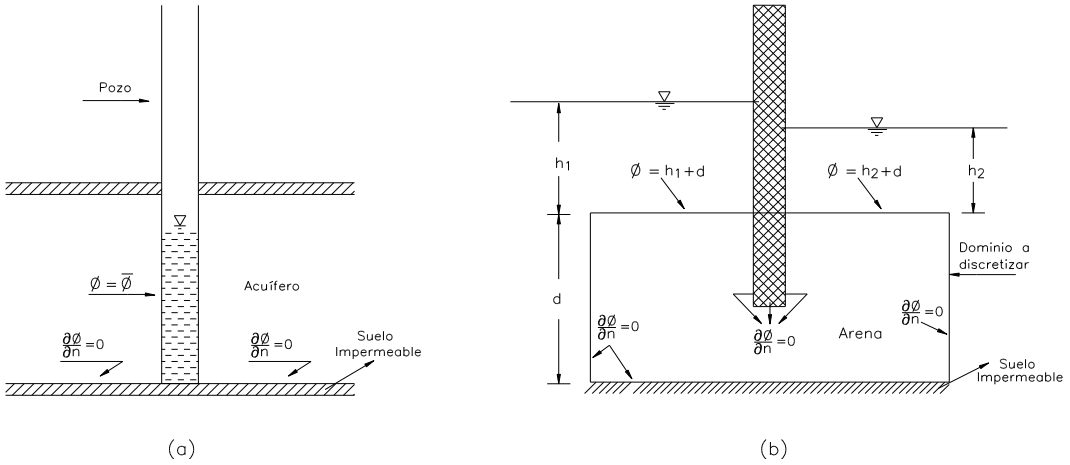


Fig.5.4 Flujo de fluidos a través de un medio poroso y condiciones de contorno.
(a)Flujo confinado en un pozo; (b) Flujo bajo una represa.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+Q=0 \qquad \text{en } V \qquad (5.29a)$$

con las condiciones de contorno:

$$\phi=\bar{\phi} \qquad \text{en } S_1 \qquad (5.29b)$$

$$k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x+k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}n_y+k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}n_z+q=0 \qquad \text{en } S_2 \qquad (5.29c)$$

donde ahora ϕ es la altura piezométrica (metros) medida desde un nivel de referencia (usualmente la parte inferior del acuífero); k_x, k_y y k_z representan los coeficientes de permeabilidad (metros por día); Q es la tasa de bombeo (m^3/día) y q representa el flujo del fluido que sale de la región, a través del contorno (m^3/día × m).
En este tipo de problema, el sistema de ecuaciones de elementos finitos, a nivel de cada elemento viene dado por:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\}+\left[p_{ij}^{(e)}\right]\left\{\dot{\phi}_j^{(e)}\right\}+\left\{f_i^{(e)}\right\}=0 \qquad (5.30)$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]=\int_{V_e}\left(k_x\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+k_y\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}+k_z\Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)dV_e \qquad (5.31a)$$

$$\left[p_{ij}^{(e)}\right]=0 \qquad (5.31b)$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\}=-\int_{V_e}Q\Psi_i dV_e+\int_{S_2^{(e)}}q\Psi_i dS_2^{(e)} \qquad (5.31c)$$

5.8.- Campos electrostáticos

En esta sección se considerará la forma más simple de los campos electromagnéticos como lo es el problema relacionado con los campos electrostáticos. En general, la ecuación que gobierna un problema de este tipo es un caso particular de la ec.(5.1); es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\frac{\rho}{\varepsilon_o}=0 \qquad \text{en V} \qquad (5.32a)$$

con las condiciones de contorno:

$$\phi=\bar{\phi} \qquad \text{en } S_1 \qquad (5.32b)$$

En este problema de valor de contorno, ϕ representa el potencial eléctrico, ε (Faraday/m) es la permisividad y ρ (Coulomb/m^3) es la densidad de carga volumétrica. En la Fig.5.5 se ilustra un dominio bidimensional, típico de un problema de esta naturaleza.

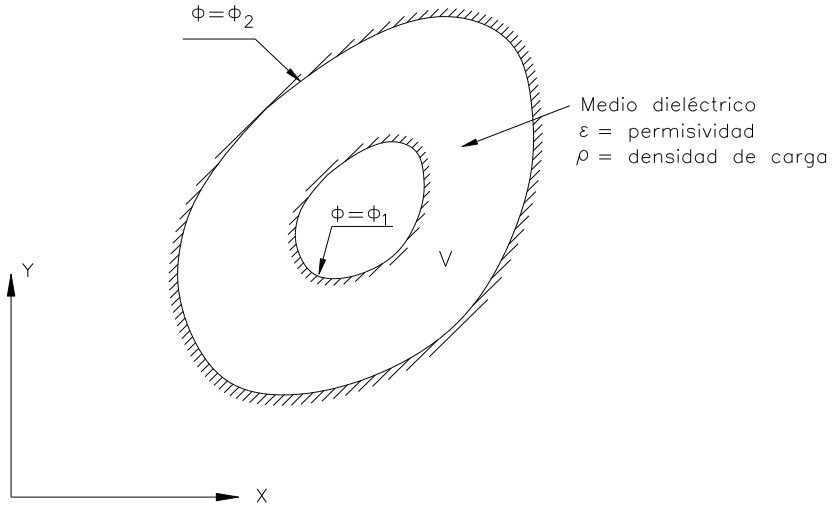


Fig.5.5 Representación esquemática de un medio dieléctrico.

Las ecuaciones de los elementos en este tipo de problema son:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\}+\left\{f_i^{(e)}\right\}=0 \qquad (5.33)$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]=\int_{A_e}\left(k_x \Psi_{i,x} \Psi_{j,x}+k_y \Psi_{i,y} \Psi_{j,y}\right)dA_e \qquad (5.34a)$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\}=-\int_{A_e}\frac{\rho}{\varepsilon_o}\Psi_i dA_e \qquad (5.34c)$$

5.9.- Solución de algunos problemas de campo escalar

En esta sección se presentará la solución de algunos problemas de campo escalar: conducción de calor, torsión de barras prismáticas y flujo a través de medios porosos. En todos los casos, la solución numérica se obtuvo con el programa c**ampoe**, el cual acompaña este texto.

5.9.1.- Ejemplo 5.1. Conducción de calor en una aleta trapezoidal

En la Fig.e5.1a se muestra el dominio de una aleta trapezoidal. Se supone que el área de la sección transversal de la aleta varia linealmente con x y se desea determinar la distribución de temperatura.

Se analizará el problema discretizando el dominio, unidimensional, con dos elementos lineales, tal como se muestra en la Fig.e5.1b, y con cuatro elementos del mismo tipo, como se indica en la Fig.e5.1c.

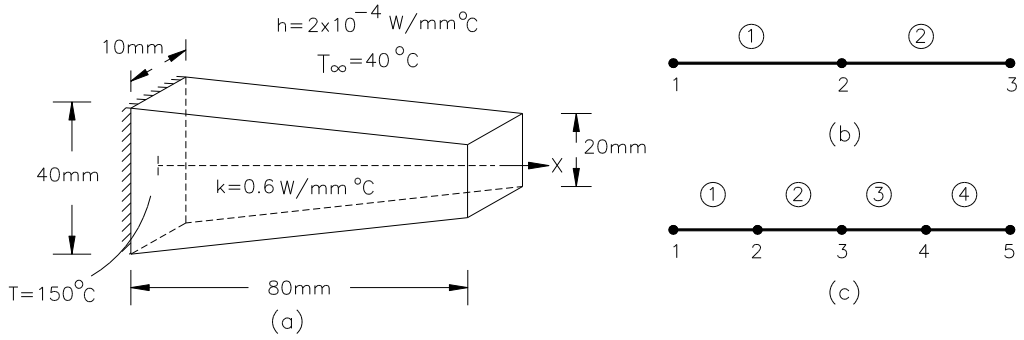


Fig.e5.1 Conducción de calor en una aleta trapezoidal. (a) Definición del dominio y condiciones de contorno; (b) Discretización del dominio con dos elementos unidimensionales lineales; (c) Discretización del dominio con tres elementos unidimensionales lineales.

Este es un problema unidimensional en régimen permanente, y por lo tanto, el sistema general de ecuaciones (5.9), en este caso toma la forma:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\} + \left\{f_i^{(e)}\right\}=0 \tag{a}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{l_e} k\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}A_e(x)dx + \int_{S_3^{(e)}} h\Psi_i\Psi_j dS_3^{(e)} \tag{b}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{S_2^{(e)}} hT_\infty^{(e)}\Psi_i dS_2^{(e)} \tag{c}$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{-1}^{+1} k\frac{2}{l_e}\Psi_{i,\xi}\frac{2}{l_e}\Psi_{j,\xi}A_e(\xi)\frac{l_e}{2}d\xi + \int_{-1}^{+1} h\Psi_i\Psi_j P_e(\xi)\frac{l_e}{2}d\xi \tag{d}$$

donde $A_e(\xi)_j$ y $P_e(\xi)$ representan la variación del área de la sección transversal y el perímetro de la aleta con relación al sistema local de referencia ξ, los cuales vienen dados por:

$$A_e(\xi) = A_i \Psi_i + A_j \Psi_j \tag{e1}$$

$$P_e(\xi) = P_i \Psi_i + P_j \Psi_j \tag{e2}$$

siendo A_i , A_j y P_i , P_j , los valores del área de la sección transversal y del perímetro en los nodos i y j del elemento(e), respectivamente.
Luego:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \frac{2k}{l_e}\int_{-1}^{+1} \Psi_{i,\xi}\Psi_{j,\xi}\left(A_i\Psi_i + A_j\Psi_j\right)d\xi \; + \; \frac{h\,l_e}{2}\int_{-1}^{+1} \Psi_i \Psi_j P_e(\xi)\frac{l_e}{2}d\xi \tag{f}$$

En la solución de este problema se utilizará el elemento unidimensional de dos nodos por elemento. Las funciones de interpolación de este elemento son:

$$\Psi_i = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad\qquad \Psi_j = \frac{1}{2}(1-\xi) \tag{g1}$$

y por lo tanto:

$$\Psi_{i,\xi} = -\frac{1}{2} \qquad\qquad \Psi_{j,\xi} = \frac{1}{2} \tag{g2}$$

sustituyendo las ecs.(g) en la ec.(f), se obtiene:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \frac{k}{l_e}\left(\frac{A_i + A_j}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{h\,l_e}{12}\begin{bmatrix} (3P_i + P_j) & (P_i + P_j) \\ (P_i + P_j) & (P_i + 3P_j) \end{bmatrix} \tag{h}$$

El vector de cargas de cargas nodales equivalentes en este caso es:

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{-1}^{+1} hT_\infty^{(e)}\,\Psi_i\,P(\xi)\frac{l_e}{2}d\xi = \frac{h\,l_e T\infty}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi_i\left(P_i\Psi_i + P\Psi_j\right)d\xi \tag{i}$$

Sustituyendo las ecs.(e2) y (g) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \frac{h\,l_e T\infty}{6}\begin{Bmatrix} (2P_i + P_j) \\ (P_i + 2P_j) \end{Bmatrix} \tag{j}$$

a.- Discretización del dominio con dos elementos igualmente espaciados:

Elemento 1:

$$l_e = 40.0\text{mm}, A_i = 400.0\text{mm}^2, P_i = 100.0\text{mm}, A_j = 300.0\text{mm}^2, P_j = 80.0\text{mm}$$

$$\left[k_{ij}^{(1)}\right]=\frac{0.60}{40.0}\left(\frac{400.0+300.0}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{2\times10^{-4}\,40.0}{12}\begin{bmatrix}(3.0\times100.0+80.0) & (100.0+80.0)\\ (100.0+80.0) & (80.0+3.0\times80.0)\end{bmatrix}$$

$$\left[k_{ij}^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}5.5033 & -5.1300\\ -5.1300 & 5.4767\end{bmatrix}$$

$$\left\{f_i^{(1)}\right\}=\frac{2\times10^{-4}\,(40.0)(40.0)}{6}\begin{Bmatrix}(2.0\times100.0+80.0)\\ (100.0+2.0\times80.0)\end{Bmatrix}$$

$$\left\{f_i^{(1)}\right\}=\begin{Bmatrix}14.933\\ 13.867\end{Bmatrix}$$

Elemento 2:

$$l_e=40.0\text{mm}\,,\,A_i=300.0\text{mm}^2\,,\,P_i=80.0\text{mm}\,,\,A_j=200.0\text{mm}^2\,,\,P_j=60.0\text{mm}$$

$$\left[k_{ij}^{(2)}\right]=\frac{0.60}{40.0}\left(\frac{300.0+200.0}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\frac{2\times10^{-4}\,40.0}{12}\begin{bmatrix}(3.0\times80.0+60.0) & (80.0+60.0)\\ (80.0+60.0) & (80.0+3.0\times60.0)\end{bmatrix}$$

$$\left[k_{ij}^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}3.9500 & -3.6567\\ -3.6567 & 3.9233\end{bmatrix}$$

$$\left\{f_i^{(2)}\right\}=\frac{2\times10^{-4}\,(40.0)(40.0)}{6}\begin{Bmatrix}(2.0\times80.0+60.0)\\ (80.0+2.0\times60.0)\end{Bmatrix}$$

$$\left\{f_i^{(2)}\right\}=\begin{Bmatrix}11.733\\ 10.667\end{Bmatrix}$$

El sistema global de ecuaciones viene dado por:

$$\begin{bmatrix}5.503 & -5.130 & 0.000\\ -5.130 & 9.427 & -3.657\\ 0.000 & -3.657 & 3.923\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}14.933\\ 25.600\\ 10.667\end{Bmatrix}$$

Introduciendo las condiciones de contorno, se obtiene:

$$\begin{bmatrix}1.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 9.427 & -3.657\\ 0.0 & -3.657 & 3.923\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}150.0\\ 795.1\\ 10.667\end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$T_1 = 150.0\,^{\circ}C\ ,\ T_2 = 133.76\,^{\circ}C\ ,\ T_3 = 127.39\,^{\circ}C.$$

b.- Discretización del dominio con cuatro elementos igualmente espaciados:

Elemento 1:

$$l_e = 20.0mm\,,\ A_i = 400.0mm^2\,,\ P_i = 100.0mm\,,\ A_j = 350.0mm^2\,,\ P_j = 90.0mm$$

El sistema local de ecuaciones correspondiente a este elemento es:

$$\begin{bmatrix} 11.380 & -11.187 \\ -11.187 & 11.373 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.733 \\ 7.4667 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2:

$$l_e = 20.0mm\,,\ A_i = 350.0mm^2\,,\ P_i = 90.0mm\,,\ A_j = 300.0mm^2\,,\ P_j = 80.0mm$$

$$\begin{bmatrix} 9.8667 & -9.6933 \\ -9.6933 & 9.8600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(2)} \\ T_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.9333 \\ 6.6667 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3:

$$l_e = 20.0mm\,,\ A_i = 300.0mm^2\,,\ P_i = 80.0mm\,,\ A_j = 250.0mm^2\,,\ P_j = 70.0mm$$

$$\begin{bmatrix} 8.3533 & -8.2000 \\ -8.2000 & 8.3467 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(3)} \\ T_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.1333 \\ 5.8667 \end{Bmatrix}$$

Elemento 4:

$$l_e = 20.0mm\,,\ A_i = 250.0mm^2\,,\ P_i = 70.0mm\,,\ A_j = 200.0mm^2\,,\ P_j = 60.0mm$$

$$\begin{bmatrix} 6.8400 & -6.7067 \\ -6.7067 & 6.8333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(4)} \\ T_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.3333 \\ 5.0667 \end{Bmatrix}$$

El sistema global de ecuaciones resultante es:

$$\begin{bmatrix} 11.380 & -11.187 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -11.187 & 21.240 & -9.6933 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -9.6933 & 18.213 & -8.2000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -8.200 & 15.187 & -6.7067 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -6.7067 & 6.8333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.733 \\ 14.400 \\ 12.800 \\ 11.200 \\ 5.067 \end{Bmatrix}$$

Una vez introducidas las condiciones de contorno, la solución de este sistema es:

$$T_1 = 150.0^{\circ}C\ ,\ T_2 = 140.083^{\circ}C\ ,\ T_3 = 133.99^{\circ}C, T_4 = 129.57^{\circ}C\ ,\ T_5 = 127.91^{\circ}C.$$

Este problema se resolvió, adicionalmente, con una malla no mostrada, de ocho elementos igualmente espaciados, de este mismo tipo. La solución obtenida fue:

$$T_1 = 150.0^{\circ}C\ ,\ T_2 = 145.14^{\circ}C\ ,\ T_3 = 140.87^{\circ}C, T_4 = 137.18^{\circ}C\ ,\ T_5 = 134.08^{\circ}C.$$

$$T_6 = 131.57^{\circ}C\ ,\ T_7 = 129.70^{\circ}C, T_8 = 128.51^{\circ}C\ ,\ T_9 = 128.08^{\circ}C$$

Como se puede observar, la solución en los nodos coincidentes de las tres mallas, convergen, a medida que la discretización del dominio se va refinando.

5.9.2.- Ejemplo 5.2. Conducción de calor en una placa rectangular con condiciones esenciales de contorno: caso permanente

Considérese la región rectangular mostrado en la Fig.e5.2, en donde se aprecia, la discretización del dominio (elementos isoparamétricos lineales) seleccionada. Se pretende determinar la distribución de temperatura en dicho dominio cuando éste está sometido a las siguientes condiciones de contorno $T(x,0) = T(x,L_y) = 0^{\circ}C$, $T(0,y) = 0^{\circ}C$, y $T(L_x,y) = 100^{\circ}C$. Se supone en este problema que: $k_x = k_y = k = 1.0$, Q=h=c=0 y $L_x = 12$ y $L_y = 50$.

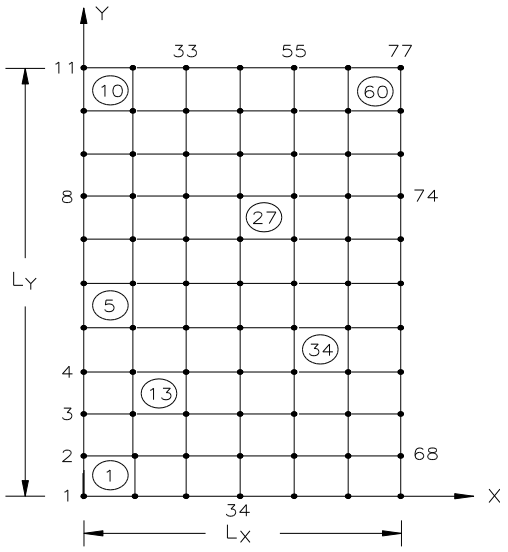


Fig.e5.2 Conducción de calor en una placa rectangular. Dominio y discretización empleada.

La solución exacta de este problema viene dada por[7]:

$$T(x,y) = 100 \times \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \text{Sen}\, \frac{n\pi y}{L_y} \frac{\text{Senh}\left(n\pi x / L_y\right)}{\text{Senh}\left(n\pi L_x / L_y\right)} \qquad \text{(a)}$$

En este caso, la ec.(5.9) queda reducida a:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\}+\left\{f_i^{(e)}\right\}=0 \tag{b}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]=\int_{A_e}\left(k_x\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+k_y\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right)dA_e \tag{c}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\}=\{0\} \tag{d}$$

En la Tabla 5.1 se muestra la distribución de temperatura en la placa para X=4.0 y X=8.0. El lector podrá verificar que estos resultados son prácticamente indistinguibles de los obtenidos mediante la solución exacta dada por la serie de la ec.(a) para n=100. Nótese la simetría de los resultados, en ambos casos, alrededor de Y=25.0.

Tabla 5.1 Distribución de temperatura en la placa e x=4.0 y x=8.0.

Y	X=4.0	X=8.0
0.0	0.000	0.000
5.0	20.548	52.296
10.0	30.226	64.178
15.0	32.648	65.845
20.0	33.154	66.516
25.0	33.256	66.578
30.0	33.154	66.516
35.0	32.648	65.845
40.0	30.226	64.178
45.0	20.548	52.296
50.0	0.000	0.000

Del mismo modo, y con el mismo grado de aproximación anterior, en la Tabla 5.2 se muestra la distribución de temperatura en la placa para Y=5.0.0 y Y=25.0

Tabla 5.2 Distribución de temperatura en la placa e Y=5.0 y Y=25.0.

X	Y=5.0	Y=25.0
0.0	0.000	0.000
2.0	9.755	16.621
4.0	20.548	33.256
6.0	33.845	49.912
8.0	52.296	66.578
10.0	81.583	83.299
12.0	100.000	100.000

5.9.3.-Ejemplo 5.3. Conducción de calor en una placa bidimensional con condiciones naturales de contorno

En la Fig.e5.3.1a se muestra una placa bidimensional y las respectivas condiciones de contorno del problema por analizar. En las Fig.e5.3.1b y 5.3.1c se muestran las dos discretizaciones utilizadas en la solución del problema de conducción de calor propuesto. Se desea determinar la distribución de temperatura en la placa, así como también el flujo de calor en los nodos seleccionados.

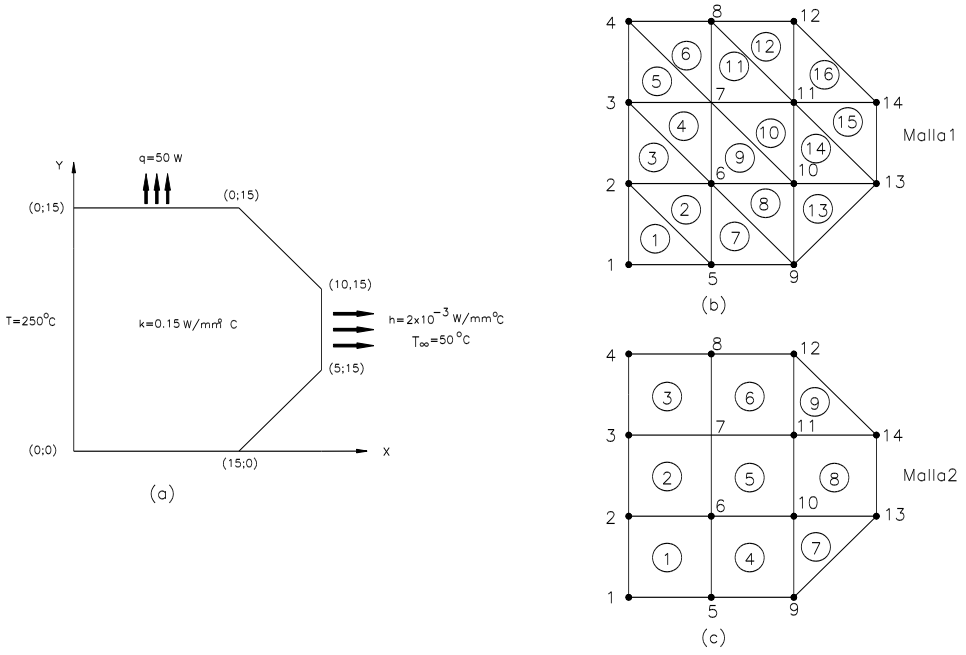


Fig.e5.3 Conducción de calor en una placa bidimensional. (a) Dominio y condiciones de contorno. (b) Malla con elementos triangulares lineales; (c) Malla con elementos triangulares y rectangulares lineales.

Este es un problema bidimensional en régimen permanente. El sistema general de ecs. (5.9), se transforma ahora en:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\} + \left\{f_i^{(e)}\right\} = 0 \tag{a}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A_e} \left(k_x \Psi_{i,x} \Psi_{j,x} + k_y \Psi_{i,y} \Psi_{j,y}\right) dA_e + \int_{S_3^{(e)}} h \Psi_i \Psi_j dS_3^{(e)} \tag{b}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{S_2^{(e)}} q \Psi_i dS_2^{(e)} - \int_{S_3^{(e)}} h T_\infty \Psi_i dS_3^{(e)} \tag{c}$$

La ec.(c) muestra que en la construcción del vector de "cargas nodales equivalentes", se hace necesario realizar la integración sobre el lado del elemento, situado en el contorno, donde se

prescribe el flujo de calor, o por donde ocurre el fenómeno de transferencia de calor por convección. Dependiendo del tipo de elemento utilizado, dicha integración se realiza mediante funciones de interpolación correspondientes a un elemento unidimensional lineal (elementos triangular lineal y rectangular isoparamétrico rectangular lineal), o de un elemento unidimensional cuadrático (elemento isoparamétrico triangular cuadrático y los elementos isoparamétricos cuadráticos de ocho nodos y langragiano de nueve nodos). A modo de ejemplo, en la Fig.e5.3.2 se muestran las respectivas funciones de interpolación de los elementos isoparamétricos rectangular lineal y triangular cuadrático.

Así, por ejemplo, en el caso de la discretización mostrada en la Fig.e5.3.1c, se prescribe el flujo de calor en los elementos tres y seis. Según el criterio establecido, en ambos elementos, el lado sobre el cual el flujo se prescribe, es el lado 2. Luego, la evaluación de la respectiva integral en cualquiera de los elementos mencionados viene dada por:

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{s_2^{(e)}} q\Psi_i dS_2^{(e)} = \left\{\begin{matrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \int_{-1}^{+1} q\Psi_2 |J| d\xi \\ \int_{-1}^{+1} q\Psi_3 |J| d\xi \end{matrix}\right\} \qquad \text{(d)}$$

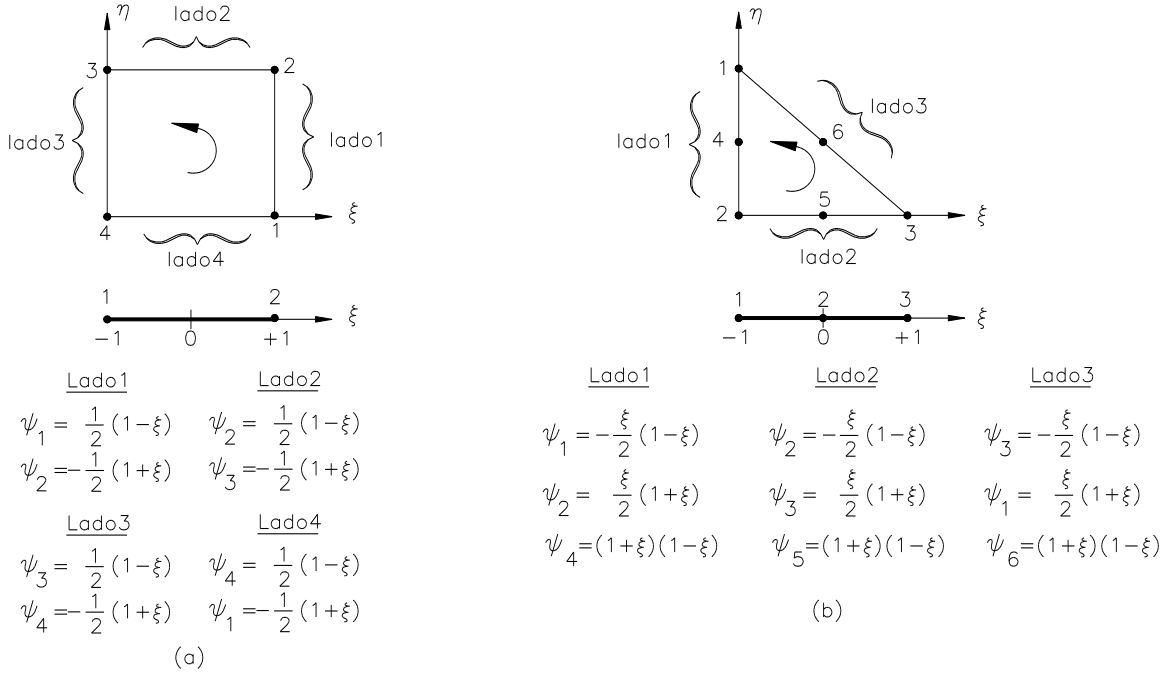


Fig.e5.3.2 Funciones de interpolación utilizadas en la evaluación de la integral del "vector de cargas nodales equivalentes". (a) Elemento isoparamétrico rectangular lineal; (b) Elemento isoparamétrico triangular lineal.

donde $|J|$ es el determinante del jacobiano de la transformación de coordenadas, el cual se determina de forma similar a la mostrada en la sección 4.12b. La construcción del vector asociado a la transferencia de calor por convección, se determina de igual modo.

Este problema se resolvió mediante el programa c**ampoe** el cual fue elaborado con la finalidad de dar respuesta numérica a los problemas relacionados con este capítulo. En la Tabla 5.3 se resumen los resultados obtenidos con la malla 1.

Tabla 5.3 Malla 1: Distribución de temperatura y flujo de calor de la placa.			
Nodo	Temperatura	q_x	q_y
1	250.0	-0.12647E+02	0.00000E+00
2	250.0	-0.14447E+02	-0.90018E+00
3	250.0	-0.21934E+02	-0.32933E+01
4	250.0	-0.38478E+02	-0.13251E+02
5	0.67156E+03	-0.11747E+02	-0.18004E+01
6	0.76158E+03	-0.13251E+02	-0.47973E+01
7	0.10909E+04	-0.21260E+02	-0.13847E+02
8	0.19743E+04	-0.21690E+02	-0.25213E+02
9	0.91309E+03	-0.56296E+01	-0.33154E+01
10	0.10339E+04	-0.55781E+01	-0.75516E+01
11	0.13777E+04	-0.26658E+01	-0.16255E+02
12	0.21321E+04	-0.51145E+00	-0.22633E+02
13	0.10830E+04	0.25407E+00	-0.63563E+01
14	0.12540E+04	0.37118E+01	-0.13881E+02

En la Tabla 5.4 se muestran los resultados obtenidos con la malla 2. Es de hacer notar la capacidad de este programa manejar diferentes tipos de elementos en una misma discretización, tal como se pone de manifiesto en la malla 2 de la figura antes mencionada.

Tabla 5.4 Malla 2: Distribución de temperatura y flujo de calor de la placa.			
Nodo	Temperatura	q_x	q_y
1	250.0	-0.12665E+02	-0.12409E+01
2	250.0	-0.15679E+02	-0.30140E+01
3	250.0	-0.30041E+02	-0.11347E+02
4	250.0	-0.41388E+02	-0.17908E+02
5	0.63081E+03	-0.10259E+02	-0.22553E+01
6	0.71354E+03	-0.12362E+02	-0.51165E+01
7	0.10327E+04	-0.18744E+02	-0.15627E+02
8	0.22265E+04	-0.23024E+02	-0.23276E+02
9	0.86630E+03	-0.57625E+01	-0.36637E+01
10	0.10016E+04	-0.51583E+01	-0.66148E+01
11	0.14270E+04	-0.19603E+01	-0.17313E+02
12	0.21428E+04	0.63336E+00	-0.25060E+02
13	0.11240E+04	-0.12729E+01	-0.60106E+01
14	0.12295E+04	0.35263E+01	-0.14719E+02

5.9.4.- Ejemplo 5.4. Conducción de calor en una pared adiabática: Caso no permanente

En la Fig.e5.4 se muestra una pared de contornos adiabáticos en donde se aprecia, también, la discretización utilizada (elementos isoparamétricos cuadráticos), la cual fue realizada con elementos isoparamétricos cuadráticos. Las condiciones de contorno son: $\partial T/\partial n = 0$ para $t > 0$ en $x = y = 0$ y en $y = 1.0$ Las condiciones iniciales son: $T(10, t) = 100^{o}C$ para $t \geq 0$ y $T(x, t) = 0^{o}C$ para $t < 0$. Se supone que $k_x = k_y = c = 1.0$.

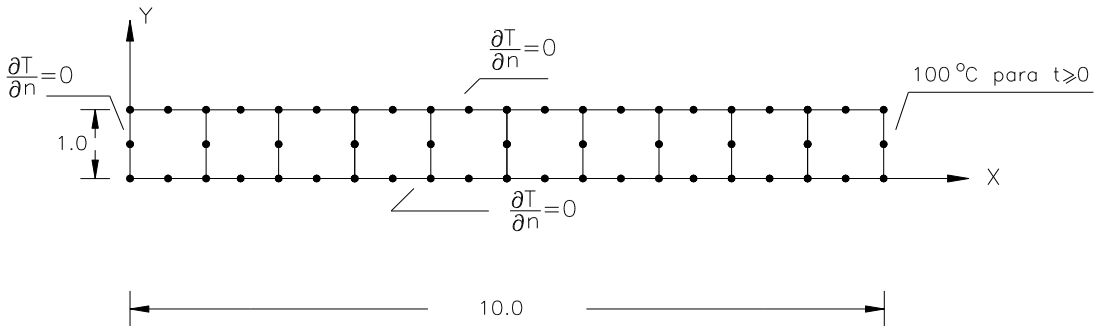


Fig.e5.4 Conducción de calor en una pared adiabática. Dominio discretizado y condiciones de contorno.

La solución exacta a este problema está dada por[7]:

$$T(x,t)=100+\frac{4}{\pi}100\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{2k-1}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{20}\times e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2 t}{400}} \tag{a}$$

Para este problema, la ec.(5.8) se transforma en:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\}+\left[p_{ij}^{(e)}\right]\left\{\dot{\phi}_j^{(e)}\right\}+\left\{f_i^{(e)}\right\}=0 \tag{b}$$

con

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]=\int_{A_e}\left(k_x\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+k_y\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right)dA_e \tag{c}$$

$$\left[p_{ij}^{(e)}\right]=\int_{A_e}c\Psi_i\Psi_j dA_e \tag{d}$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\}=\{0\} \tag{e}$$

En la Tabla5.5 se compara la solución exacta con la solución obtenida por el programa **campoe**, de la evolución de la temperatura con el tiempo en la sección x=9, para un paso de tiempo de tiempo constante de $\Delta t=0.1$sg.

Tabla 5.5 Comparación de los resultados de la distribución de temperatura de la pared adiabática.

Tiempo (sg)	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0	3.0	5.0
Sol. exacta	2.53	11.38	19.67	31.73	42.92	47.95	61.71	68.31	75.18
Sol. **Campoe**	2.28	12.42	19.97	32.11	43.13	48.09	61.74	68.32	75.18
Error (%)	10	< 10	< 1.6	< 1.2	< 0.5	< 0.3	< 0.05	-	-

Tiempo (sg)	7	10	20	30	40	50	60	70	80
Sol. Exacta	78.93	82.31	87.61	90.47	92.57	94.20	95.47	96.46	97.23
Sol. **campoe**	78.93	82.31	87.61	90.47	92.57	94.20	95.47	96.46	97.23
Error (%)	-	-	-	-	-	-	-	-	-

5.9.5.- Ejemplo 5.5. Torsión de una barra prismática de sección transversal cuadrada

En la Fig.e5.5.1a se muestra una barra prismática, de sección transversal cuadrada, bajo la acción del par torsor M. Si se supone que $2G\theta = 1.0$, donde G es el módulo de rigidez del material de barra y θ es el ángulo de giro por unidad de longitud de dicha barra, se desea determinar la distribución de la función de esfuerzos, así como también los esfuerzos cortantes que se generan en la sección transversal.

Debido a la simetría del problema, se puede discretizar, únicamente, un octavo de la sección transversal, tal como se muestra en la Fig.e5.1b, donde además se indican las respectivas condiciones de contorno. En las Fig.e5.5.1c y 5.1d se muestran las dos discretizaciones empleadas en la solución de este problema mediante el programa **campoe**.

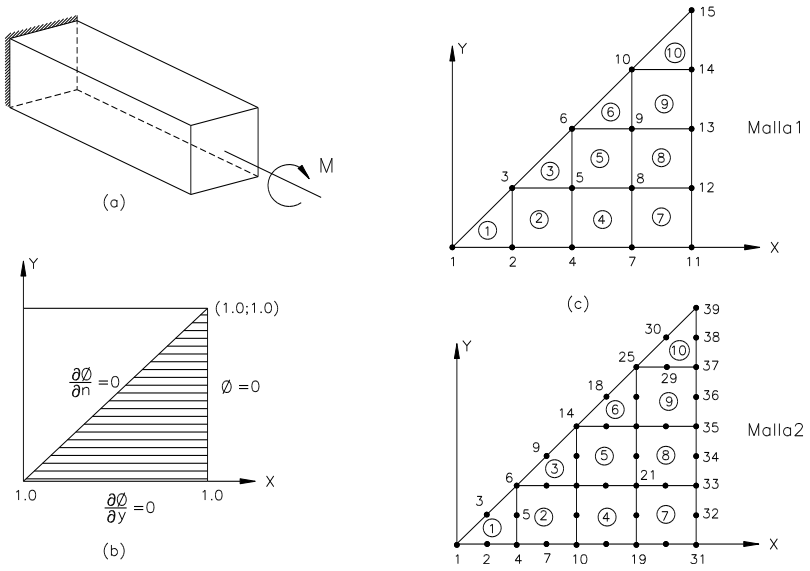


Fig.e5.5.1 Barra cuadrada sometida a torsión. (a) Definición del problema; (b) Dominio a ser discretizado y condiciones de contorno; (c) Malla de elementos lineales; (d) Malla de elementos cuadráticos.

La solución exacta de la distribución de la función de esfuerzos, viene dada por:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\left(1-y^2\right) + \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\left[(2n-1)\frac{\pi y}{2}\right]\cosh\left[(2n-1)\frac{\pi x}{2}\right]}{(2n-1)^3\cosh(2n-1)\frac{\pi}{2}}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Para esta clase de problemas, las ecuaciones de los elementos finitos son, como ya se estableció:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\} + \left\{f_i^{(e)}\right\} = 0 \qquad \text{(b)}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A_e} \left(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right) dA_e \qquad (c)$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = \int_{A^{(e)}} 2G\theta\Psi_i \, dA_e \qquad (d)$$

y el momento torsor se determina mediante:

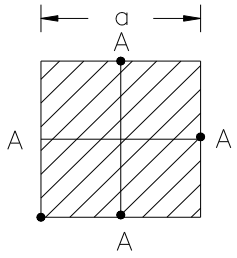
$$M = \int_{Arera} \phi \, dA \qquad (e)$$

En la Tabla 5.6 se comparan los valores de $\phi(x,0)$ obtenidos de la solución exacta con los primeros cincuenta términos de la serie, con los valores obtenidos del programa c**ampoe** para las dos mallas mostradas en la Fig.e5.5.1.

Tabla 5.6 Comparación de los valores de $\phi(x,0)$.			
X	Sol. Exacta	Malla 1	Malla 2
0.0	0.2947	0.3004	0.2947
0.25	0.2789	0.2796	0.2789
0.50	0.2293	0.2311	0.2293
0.75	0.1397	0.1406	0.1397
1.0	0.0000	0.0000	0.0000

Como puede apreciarse, la solución obtenida mediante la malla 2, coincide con la solución exacta.

La teoría de la elasticidad provee, a través de la analogía de la membrana, soluciones analíticas mediante las cuales se pueden determinar el par torsor generado por el ángulo de giro de la barra, y el valor del máximo esfuerzo cortante. En la Fig.e5.5.2 se muestra una sección cuadrada de lado a y la localización del punto A, donde se genera el máximo esfuerzo cortante.



$$\Theta = \frac{1}{\beta a b^3}\frac{M}{G} \qquad \tau_A = \frac{M}{\alpha a b^2} \qquad \begin{cases} \alpha = 0.208 \\ \beta = 0.141 \end{cases}$$

Fig.e5.5.2 Sección transversal cuadrada. (a) Solución analítica y constantes asociadas.

Puesto que $2G\theta = 1.0$, se seleccionó, arbitrariamente $\theta = 1.0$ y G=0.50, de modo que:

$$\theta = \frac{1}{\beta a b^3}\frac{M}{G} = 1.0 \qquad (b)$$

luego:

$$1.0 = \frac{1}{0.141(2)^4}\frac{M}{0.50} \qquad \Rightarrow \qquad M = 1{,}128\,N-m$$

y

$$\tau_A = \frac{M}{\alpha a b^2} \tag{c}$$

$$\tau_A = \frac{1{,}128}{0.208(2)^3} = 0.6778\,N/m^2$$

En la Tabla 5.7 se comparan el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor de las dos discretizaciones utilizadas con las soluciones analíticas.

Tabla 5.7 Comparación de los resultados del momento torsor y esfuerzo cortante de la barra de sección transversal cuadrada.			
	Exacto	Malla 1	Malla 2
M	1,128	1,093	1,124
τ_A	0.6778	0.5496	0.6742

Mientras que para la malla 1 el porcentaje de error para el valor del momento torsor es de 3.10% y para el máximo esfuerzo cortante es de 18.91%, para la malla 2, estos porcentajes son 0.36% y 0.53%, respectivamente. De modo que los resultados numéricos obtenidos concuerdan, satisfactoriamente, con las soluciones analíticas.

5.9.6.-Ejemplo 5.6. Torsión de una barra prismática de sección transversal circular

En la Fig.e5.6.1a se muestra una barra prismática, de sección transversal circular, bajo la acción del par torsor M.

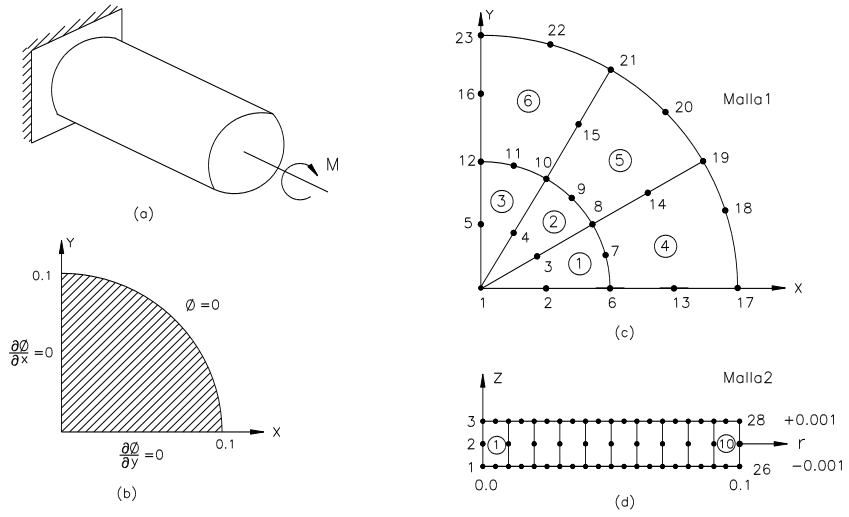


Fig.e5.6.1 Barra circular sometida a torsión. (a) Definición del problema; (b) Dominio a ser discretizado y condiciones de contorno; (b) Malla para la solución bidimensional; (c) Malla para la solución axisimétrica.

El módulo de rigidez del material de la barra es $G = 26.0 \times 10^9$ MPa, y el ángulo de giro por unidad de longitud de la barra es $\theta = 1.0^o$. Se desea determinar el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor aplicado. Debido a la simetría del problema, se puede discretizar, únicamente, un cuarto de la sección transversal, tal como se muestra en la Fig.e5.6.1b, donde además se indican las respectivas condiciones de contorno. En las Figs.e5.6.1c y e5.6.1d se muestran las dos discretizaciones empleadas en la solución de este problema mediante el programa **campoe**.

La analogía de la membrana, igual que en el ejemplo anterior, permite obtener soluciones analíticas para el par torsor generado por el ángulo de giro de la barra, y el valor del máximo esfuerzo cortante este caso particular. En la Fig.e5.6.2 se muestra una sección transversal circular y las respectivas soluciones analíticas.

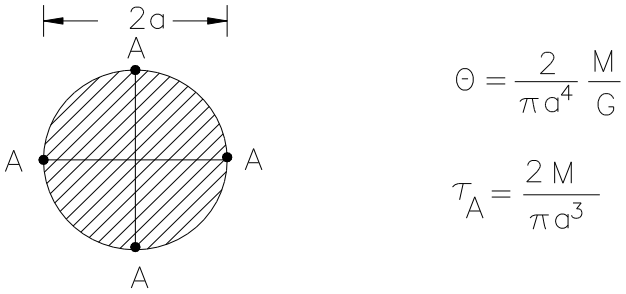


Fig.e5.6.2 Sección transversal circular. Solución analítica derivada de la analogía de la membrana.

La solución analítica viene, entonces, dada por:

$$\theta = \frac{2}{\pi a^4}\frac{M}{G} \tag{a}$$

luego:

$$1.0\frac{\pi}{180} = \frac{2}{\pi(0.1)^4}\frac{M}{26.0\times10^9} \qquad \Rightarrow \qquad M = 71.280{,}50\,\text{N}-\text{m}$$

y

$$\tau_A = \frac{2M}{\pi a^3} \tag{b}$$

$$\tau_A = \frac{2(71.280.50}{\pi(0.1)^3} = 45{,}378\,\text{MPa}$$

En la Tabla 5.8 se comparan el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor de las dos discretizaciones utilizadas con las soluciones analíticas.

Tabla 5.8 Comparación de los resultados del momento torsor y esfuerzo cortante de la barra de sección transversal circular.

	Exacto	Malla 1	Malla 2
M	71.280,50	71.244,00	71.280,00
τ_A	45,378	45,376	45,378

Se puede observar que ambas soluciones, tanto la bidimensional como la axisimétrica, conduce a excelentes resultados.

5.9.7.- Ejemplo 5.7. Torsión de una barra prismática de sección transversal elíptica

En la Fig.e5.7.1a se muestra una barra prismática, de sección transversal elíptica, bajo la acción del par torsor M. El módulo de rigidez del material de la barra es $G = 26.0 \times 10^9$ MPa, y el ángulo de giro por unidad de longitud de la barra es $\theta = 1.0^o$. Se desea determinar el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor aplicado.

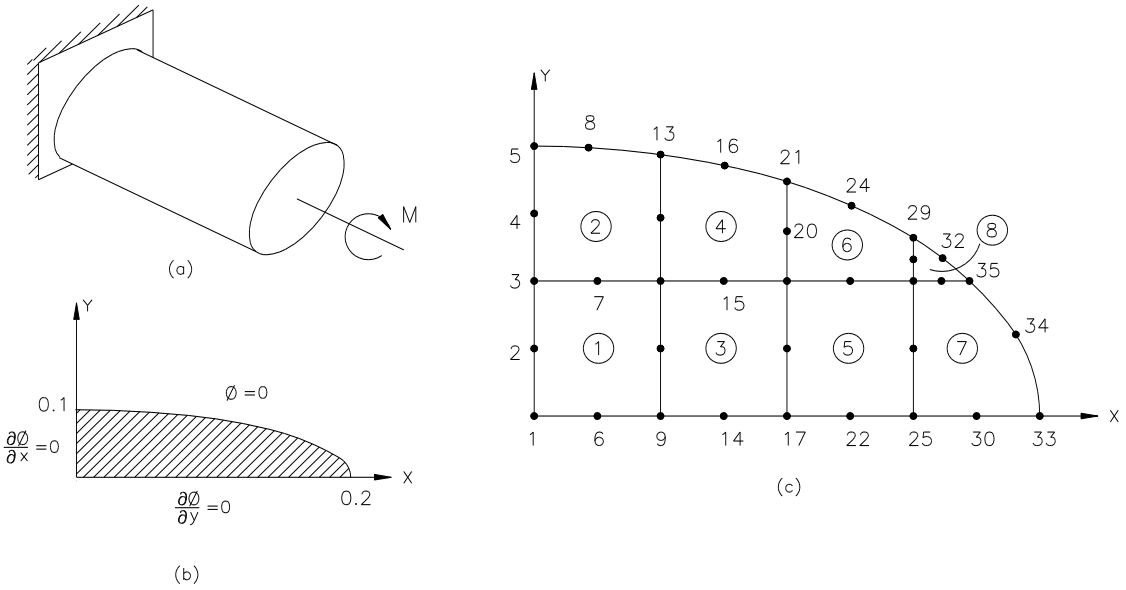


Fig.e5.7.1 Barra elíptica sometida a torsión. (a) Definición del problema; (b) Dominio a ser discretizado y condiciones de contorno; (c) Malla con elementos isoparamétricos cuadráticos.

Debido a la simetría del problema, se puede discretizar, únicamente, un cuarto de la sección transversal, tal como se muestra en la Fig.e5.7.1b, donde además se indican las respectivas condiciones de contorno.

En la Fig.e5.7.1c se muestra la malla usada en la discretización del dominio. De nuevo, la analogía de la membrana, permite obtener soluciones analíticas para el par torsor generado por el ángulo de giro de la barra, y el valor del máximo esfuerzo cortante este caso particular

En la Fig.e5.7.2 se muestra una sección transversal elíptica arbitraria y las respectivas soluciones analíticas.

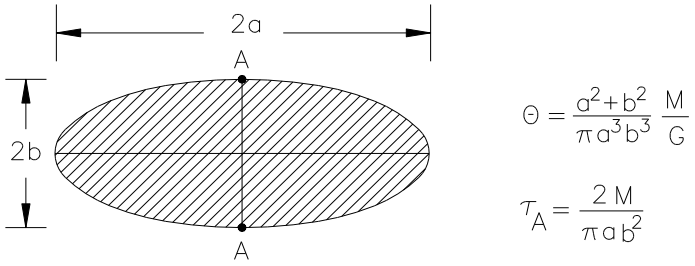


Fig.e5.7.2 Sección transversal elíptica. Solución analítica derivada de la analogía de la membrana.

La solución analítica viene, entonces, dada por:

$$\theta = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}\frac{M}{G} \qquad (a)$$

luego:

$$1.0\frac{\pi}{180} = \frac{(0.2)^2 + (0.1)^2}{\pi(0.2)^3(0.1)^3}\frac{M}{26.0\times10^9} \qquad \Rightarrow \qquad M = 228.078\,N-m$$

y

$$\tau_A = \frac{2M}{\pi ab^2} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_A = \frac{2(228.078)}{\pi(0.2)(0.1)^2} = 72{,}61\,MPa$$

En la Tabla 5.9 se comparan el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor de la solución numérica obtenida mediante el programa **campoe**, con las respectivas soluciones analíticas.

Tabla 5.9 Comparación de los resultados del momento torsor y esfuerzo cortante de la barra de sección transversal elíptica.

	Exacto	Solución **mef**
M	228.078	226.432
τ_A	72.61	70.68

Como se puede notar el error en la aproximación del momento torsor es menor al 1%, y el error en el cálculo del máximo esfuerzo cortante es 2.65%. Las soluciones aproximadas obtenidas por el programa **campoe** son excelentes.

5.9.8.-Ejemplo 5.8. Torsión de una barra prismática de sección transversal triangular

En la Fig.e5.8.1a se muestra una barra prismática, cuya sección transversal es un triangulo equilátero, bajo la acción del par torsor M.

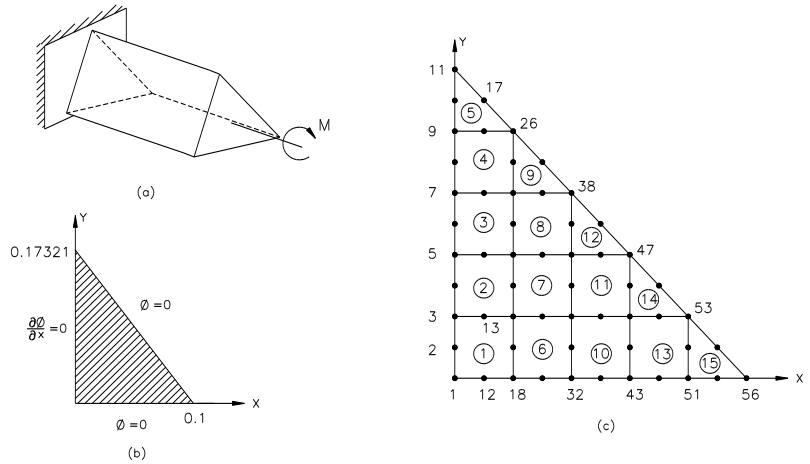


Fig.e5.8.1 1 Barra triangular sometida a torsión. (a) Definición del problema; (b) Dominio a ser discretizado y condiciones de contorno; (c) Malla con elementos isoparamétricos cuadráticos.

El módulo de rigidez del material de la barra es $G = 26.0 \times 10^9$ MPa, y el ángulo de giro por unidad de longitud de la barra es $\theta = 1.0^o$. Se desea determinar el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor aplicado. Debido a la simetría del problema, se puede discretizar, únicamente, la mitad de la sección transversal, tal como se muestra en la Fig.e5.8.1b, donde además se indican las respectivas condiciones de contorno.

En la Fig.e5.8.1c se muestra la malla usada en la discretización del dominio. En la Fig.e5.8.2 se muestra una sección transversal elíptica arbitraria y las respectivas soluciones analíticas, deducidas, como en los ejemplos anteriores mediante la analogía de la membrana.

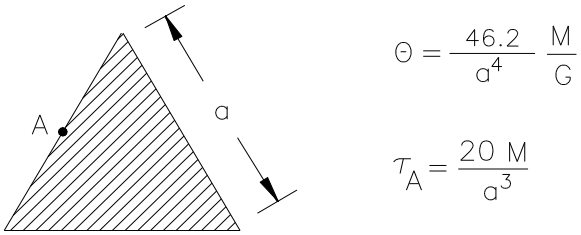


Fig.e5.8.2 Sección transversal triangular. Solución analítica derivada de la analogía de la membrana.

La solución analítica viene, entonces, dada por:

$$\theta = \frac{46.20}{a^4}\frac{M}{G} \tag{a}$$

luego:

$$1.0\frac{\pi}{180} = \frac{46.20}{(0.2)^4}\frac{M}{26.0\times10^9} \qquad \Rightarrow \qquad M = 15.716\,N-m$$

$$\tau_A = \frac{20M}{a^3} \tag{b}$$

$$\tau_A = \frac{20(15.716)}{(0.2)^3} = 39.29\,MPa$$

En la Tabla 5.10 se comparan el máximo esfuerzo cortante y el momento torsor de las dos discretizaciones utilizadas con las soluciones analíticas.

Tabla 5.10 Comparación de los resultados numéricos y teóricos del momento torsor y esfuerzo cortante de la barra de sección transversal triangular.

	Exacto	Solución **MEF**
M	15.716	15.714
τ_A	39.29	38.63

De nuevo es importante resaltar la calidad de la solución aproximada obtenida mediante el programa c**ampoe**.

5.9.9.- Ejemplo 5.9. Flujo subterráneo de agua en un acuífero homogéneo

En la Fig.e5.9.1 se muestra el dominio de un acuífero. El material que bordea los lados mayores del rectángulo que forma la región del mismo, es impermeable. Se supone que la infiltración en la región, que existe en los lados izquierdo y derecho del acuífero, es suficiente para mantener una altura piezométrica constante, e igual a 80.0 m a lo largo de dichos contornos. Además, se supone que un río divide la región tal como se muestra y que infiltra el acuífero a una tasa de $0.25\text{m}^3/\text{día}\times\text{m}$. Adicionalmente existen dos bombas: una localizada en (458.33;312.50) que bombea a una tasa de $Q_1 = 1000\,\text{m}^3/\left(\text{día}\times\text{m}^3\right)$ y la otra que está localizada en (947.92;500), bombea a una tasa de $Q_2 = 2000\,\text{m}^3/\text{día}$.

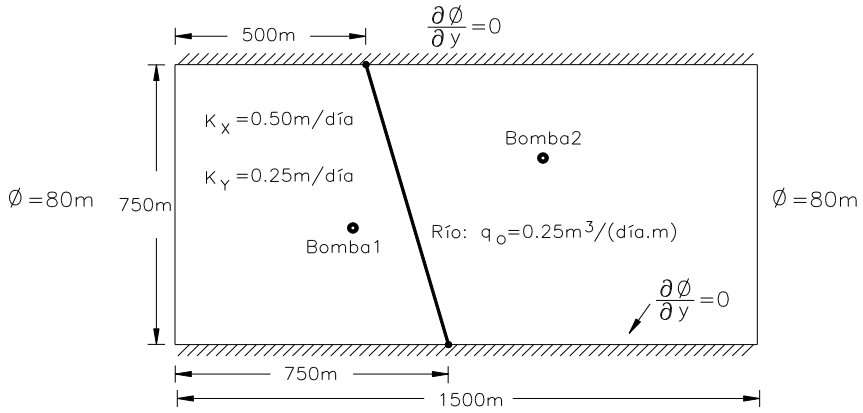


Fig.e5.9.1 Dominio y condiciones de contorno del acuífero.

En la Fig.e5.9.2 se muestra la malla usada en la discretización del dominio del acuífero, la misma consta de 64 elementos triangulares lineales con 45 nodos en total. Se debe hacer notar que la bomba 1 está situada en el centroide del elemento 20 y, la bomba 2 en el centroide del elemento 46.

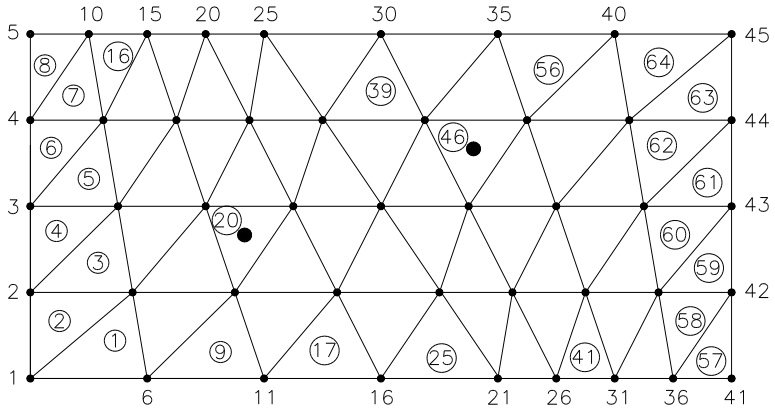


Fig.e5.9.2 Discretización del dominio del acuífero con elementos triangulares lineales.

El sistema local de ecuaciones de elementos finitos, para este caso bidimensional se reduce a:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]\left\{\phi_j^{(e)}\right\} + \left\{f_i^{(e)}\right\} = 0 \qquad (a)$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right] = \int_{A_e} \left(k_x \Psi_{i,x} \Psi_{j,x} + k_y \Psi_{i,y} \Psi_{j,y}\right) dA_e \qquad (b)$$

$$\left\{f_i^{(e)}\right\} = -\int_{A_e} Q\Psi_i dA_e + \int_{S_2^{(e)}} q\Psi_i dS_2^{(e)} \qquad (c)$$

La contribución del término $\int_{A_e} Q\Psi_i dA_e$ al vector de cargas nodales equivalentes de la ec.(c), se determina del siguiente modo:

Las bombas se localizan en el interior de algún elemento de la malla utilizada en la discretización del problema (en este caso los elementos 20 y 46). El procedimiento de cálculo consiste entonces en distribuir ese término fuente por los nodos del elemento mediante una interpolación directa. Como en este caso las bombas están situadas en el centroide de los respectivos elementos, es fácil verificar que el vector local de cargas de asociado a cada uno de los mencionado elementos es:

Elemento 1: Elemento 2:

$$\int_{A_e} Q\Psi_i dA_e = \begin{Bmatrix} -333.33 \\ -333.33 \\ -333.33 \end{Bmatrix} \qquad \int_{A_e} Q\Psi_i dA_e = \begin{Bmatrix} -666.667 \\ -666.667 \\ -666.667 \end{Bmatrix}$$

El término $\int_{S_2^{(e)}} q\Psi_i dS_2^{(e)}$ se determina de forma idéntica a la descrita previamente en el ejemplo 5-3. En este caso, los coeficientes a determinar están asociados a los nodos de los elementos 25,27,29 y 31; es decir, los elementos cuyos lados coinciden con el río que cruza el acuífero.

En la Fig.e5.9.3 se muestran los valores de la altura piezométrica del acuífero determinados mediante el programa c**ampoe**.

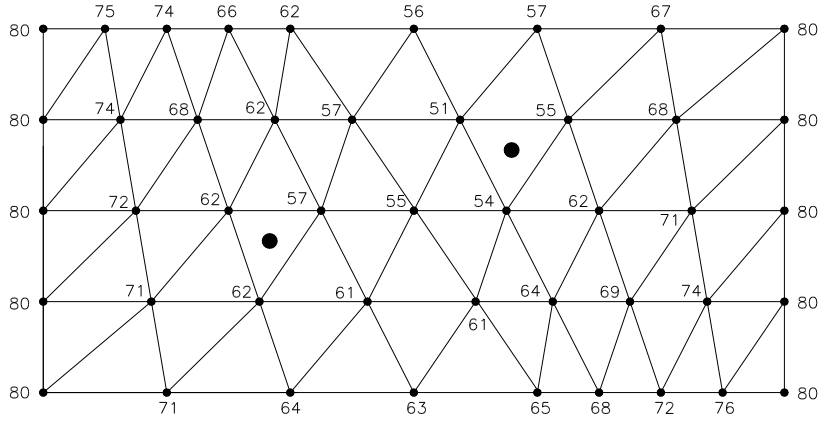


Fig.e5.9.3 Valores nodales de la altura piezométrica del acuífero.

5.9.10.- Ejemplo 5-10. Zona acuífera delimitada por los ríos Boconó y Masparo

Como un ejemplo de este tipo de problemas, se presenta la simulación numérica de la zona acuífera delimitada por los ríos Boconó y Masparo, la cual corresponde a un medio homogéneo isotrópico. El dominio del problema se muestra en la Fig.e5.10.1.

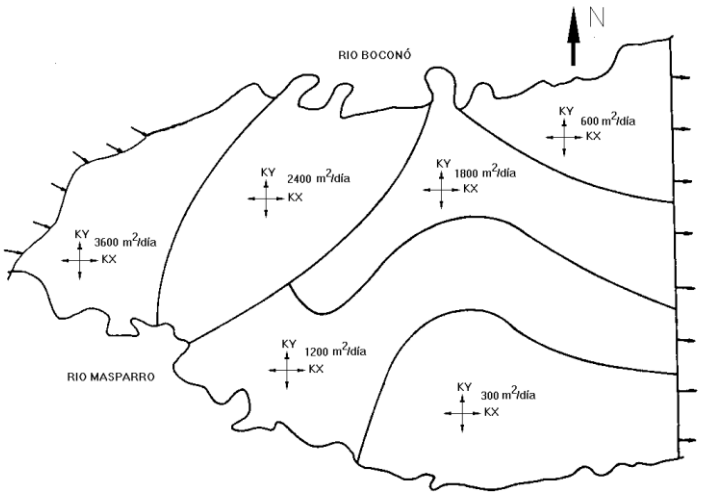


Fig.e5.10.1. Dominio del acuífero Boconó - Masparro.

Debido a la naturaleza de la conexión entre ambos ríos y el acuífero, se supuso que la carga, a lo largo de los ríos es constante. Así mismo se consideran conocidos tanto los flujos de entrada (noroeste), como los de salida (sudeste). El valor del caudal de bombeo es de 50.000 $m^3/día$. En la Fig.e5.10.2 se muestra la malla de elementos isoparamétricos cuadráticos que se utilizó en la simulación, así como también los elementos donde se ubicaron los pozos.

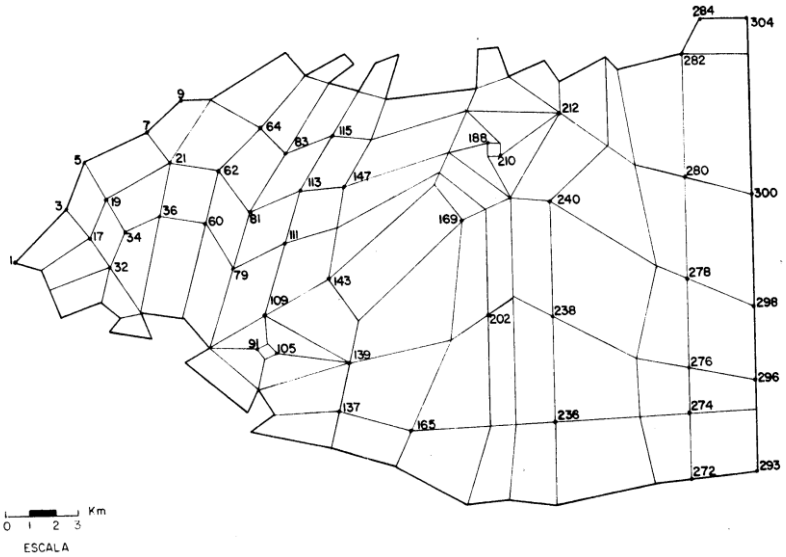


Fig.e5.10.2 Discretización del dominio del acuífero Boconó - Masparro.

En la Fig.e5.10.3 se muestran las líneas de igual carga hidráulica. Los resultados obtenidos predicen con exactitud la evidencia experimental y otras soluciones numéricas[7].

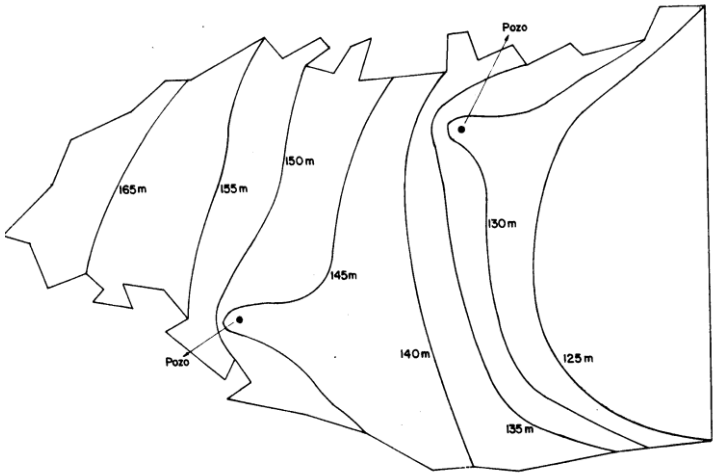


Fig.e.5.10.3 Líneas de igual carga hidráulica en el acuífero Boconó - Masparro.

En la Tabla 5.11 se comparan algunos resultados numéricos obtenidos mediante el programa c**ampoe** con los reportados en la Ref.27.

Tabla 5.11 Comparación de los resultados numéricos de la distribución de carga hidráulica.

Nodo	**campoe**	Ref.27
3	171.4	170.9
5	171.9	171.8
21	163.0	162.9
34	164.5	164.4
64	154.0	154.1
91	141.2	142.9
109	148.9	148.5
115	148.1	148.3
139	144.7	143.7
149	145.6	145.6
296	101.5	102.6
300	107.3	108.8

5.9.11.- Ejemplo 5-11. Cable coaxial rectangular

En la Fig.e5.11.1a se muestra la sección transversal de un cable coaxial rectangular. En la superficie interna del aislante dieléctrico ($\varepsilon_R = 3.0$), se aplica un voltaje de 100 V. Si el voltaje en la superficie exterior es igual a cero, se desea determinar la distribución del campo de voltaje en el espacio anular. Por simetría, sólo se tiene que considerar una cuarta parte de dicha sección transversal. En la Fig.e5.11.1b se muestra el dominio a discretizar y las respectivas condiciones de contorno.

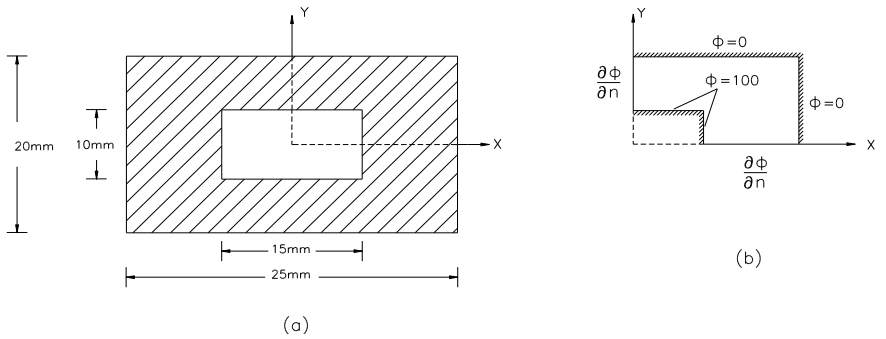


Fig.e5.11.1 Cable coaxial rectangular.

La ecuación que gobierna este problema es la ec.(5.32a) particularizada para el caso bidimensional, con las condiciones de contorno indicadas en la Fig.e5.11.1a. El dominio se discretizó con 75 elementos isoparamétricos lineales para un total de 96 nodos, tal como se muestra en la Fig.e5.11.2.

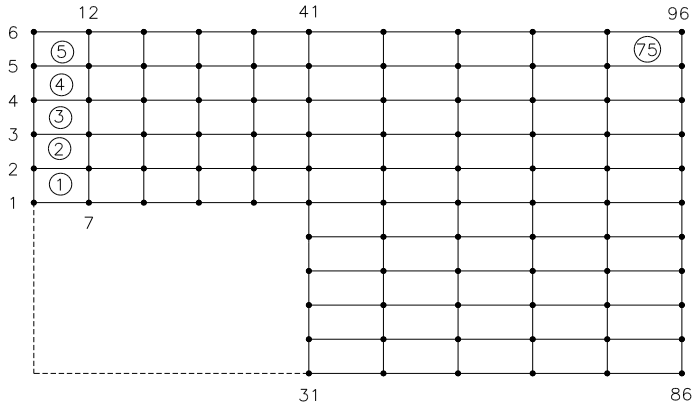


Fig.e5.11.2 Discretización del dominio con elementos isoparamétricos lineales.

La solución numérica de este problema se obtuvo mediante el programa **campoe**. En la Fig.e5.11.3 se muestran las líneas de igual voltaje en el espacio anular.

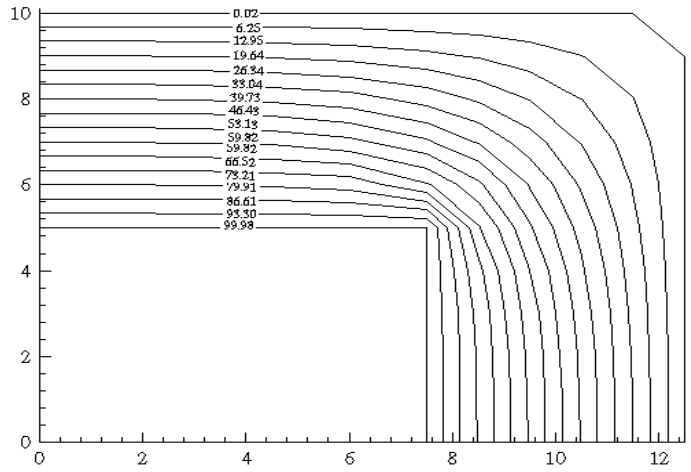


Fig.e5.11.3 Distribución de voltaje en el espacio anular del cable coaxial rectangular.

VI.- FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS VÍA RESIDUOS PESADOS

6.1.- Introducción

La formulación variacional de cualquier problema exige, como requisito previo, el conocimiento del funcional que lo gobierna. Lamentablemente, a veces, dicho funcional es difícil y, en algunos casos hasta imposible de obtener, debiéndose, por lo tanto, recurrir a otro tipo de solución. Una solución alterna consiste en utilizar el llamado *método de los residuos pesados* (**mrp**), el cual es una técnica numérica a través de la cual se obtienen soluciones aproximadas del llamado Problema de Valor de Contorno (problemas expresados mediante una ecuación diferencial, o un conjunto de ecuaciones diferenciales, con sus respectivas condiciones de contorno y/o condiciones iniciales), y proporciona un medio muy eficiente de obtener las ecuaciones de elementos finitos, a partir de dichas ecuaciones.

Debido a las diferentes posibilidades en la selección de las funciones peso que pueden emplearse, existen distintos criterios de residuos pesados: colocación, subdominio, mínimos cuadrados, Galerkin, etc. Entre éstos, el más ampliamente usado en las aplicaciones de elementos finitos es el método de Galerkin, el cual constituye la base matemática de la mayoría de los programas computacionales basados en el **mef**.

6.2.- Formulación general del método de los residuos pesados

Puesto que sólo es posible obtener una representación finita del estado continuo de las variables asociadas a un problema dado, existe un error o residuo inherente al carácter aproximado de la solución. Así, supóngase que se desea determinar una representación aproximada para el campo de la variable ϕ, la cual está gobernada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\Im(\phi) - f = 0 \tag{6.1}$$

en un dominio Ω, de contorno Γ, y donde $\Im$ es un operador diferencial y f es un función conocida de las variables independientes. La ec.(6.1) debe complementarse con las condiciones de contorno asociadas a un problema dado. Entonces, la variable dependiente se puede aproximar mediante:

$$\phi \cong \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{m} N_i \, a_i \tag{6.2}$$

donde N_i son las funciones de aproximación supuestas, a_i son parámetros o funciones desconocidas de una de las variables independientes y m es el número de incógnitas. Cuando en la ec.(6.1) se sustituye $\tilde{\phi}$, en general:

$$\Im\left(\tilde{\phi}\right) - f = R \neq 0 \tag{6.3}$$

donde R es el llamado error residual.

El error puede ser distinto de cero en cada punto del dominio. Sin embargo, la integral de dicho residuo puede ser cero debido a que la integral representa, por así decir, un promedio del error sobre el dominio. Luego, el **mrp** procura determinar las m incógnitas a_i, de tal modo que:

$$\int_{\Omega}\left[\Im\left(\tilde{\phi}\right)-f\right]W_i\,d\Omega=\int_{\Omega}R\,W_i\,d\Omega=0\;;i=1,2,.....,m \tag{6.4}$$

donde W_i son las llamadas funciones peso. La forma de la distribución del error expresada en la ec.(6.4), da origen a las distintas versiones del método.

Como una forma de introducir los distintos criterios ya mencionados, se hará su presentación para el caso unidimensional. Sin embargo, su extensión al caso bi y tridimensional es directa.

6.2.1.- Método de la colocación

En este método para cada parámetro a_i, se selecciona un punto x_i en el dominio. Para cada x_i, se fuerza a que el residuo sea exactamente igual a cero; es decir,

$$\begin{aligned} &R\left(x_1\,;a\right)=0\\ &R\left(x_2\,;a\right)=0\\ &.....\\ &R\left(x_n\,;a\right)=0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Si existen n parámetros, se formará un sistema de n ecuaciones de residuos del tipo de la ec.(6.5). Los puntos x_i se denominan *puntos de colocación*, y pueden estar colocados en cualquier parte en el dominio y también sobre el contorno, sin seguir ningún patrón determinado. En la Fig.6.1 se muestra la función peso W_i asociada a este método, la cual es la *función delta de Dirac*: $W_i=\delta\left(x-x_i\right)$ y por lo tanto, para cada punto x_i, el método de colocación establece que:

$$\int_{x_a}^{x_b}R\left(x;a\right)\delta\left(x-x_i\right)dx=R\left(x_i\,;a\right)=0 \qquad \text{para i = 1, 2, ..., n} \tag{6.6}$$

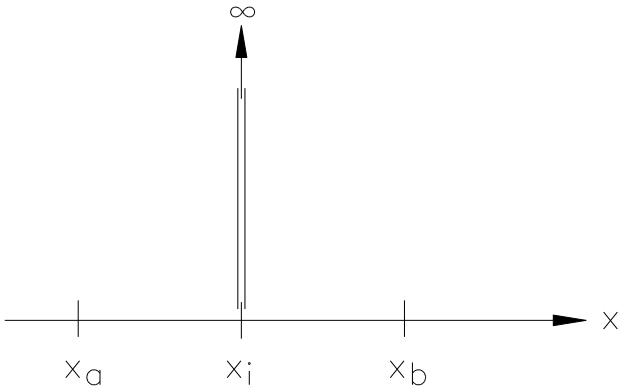


Fig.6.1 Función peso asociada al método de colocación.

6.2.2.- Método de los subdominios

En este método, para cada parámetro a_i, se selecciona un intervalo Δx_i en el dominio, y se fuerza a que el promedio del error residual en cada intervalo sea igual a cero; es decir,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x_1}\int_{\Delta x_1} R(x;a)\,dx=0\\
&\frac{1}{\Delta x_2}\int_{\Delta x_2} R(x;a)\,dx=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{\Delta x_2}\int_{\Delta x_2} R(x;a)\,dx=0
\end{aligned} \qquad (6.7)$$

De nuevo, si existen n parámetros, se formará un sistema de n ecuaciones de residuos. Los intervalos Δx_i se denominan *subdominios*, los cuales pueden seleccionarse de forma arbitraria (aun superponiéndose o con separación entre ellos). En la Fig.6.2 se muestra la función peso W_i asociada a este método.

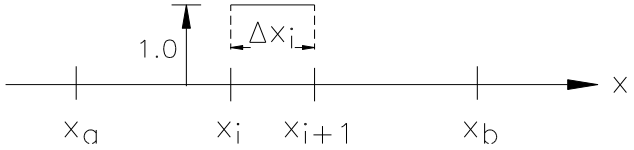


Fig.6.2 Función peso asociada al método de los subdominios.

La función W_i es *la función pulso*: $W_i = \sqcap\!\sqcup(x_{i+1} - x_i)$, y por lo tanto para cada intervalo Δx_i se tendrá:

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x;a)\sqcap\!\sqcup(x_{i+1}-x_i)\,dx = \int_{\Delta_{x_i}} R(x;a)\,dx \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad (6.8)$$

6.2.3.- Método de los mínimos cuadrados

Con este criterio, se trata de minimizar con relación a cada a_i, la integral sobre todo el dominio del cuadrado del residuo; es decir, según el criterio de los mínimos cuadrados. Dicha integral es una función de los a_i, de tal modo que su minimización requiere que las derivadas parciales con relación a cada a_i sea igual a cero. Luego:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a_1}\int_{xa}^{xb} R^2(x;a)\,dx=\int_{xa}^{xb} R(x;a)\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_1}\,dx=0\\
&\frac{\partial}{\partial a_2}\int_{xa}^{xb} R^2(x;a)\,dx=\int_{xa}^{xb} R(x;a)\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_2}\,dx=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial}{\partial a_n}\int_{xa}^{xb} R^2(x;a)\,dx=\int_{xa}^{xb} R(x;a)\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_n}\,dx=0
\end{aligned} \qquad (6.9)$$

Si existen n parámetros, se formará un sistema de n ecuaciones. La función peso W_i asociada a este método es:

$$W_i(x) = \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_i} \tag{6.10}$$

y por lo tanto este método propone:

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x;a) \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_i} dx = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{6.11}$$

6.2.4.- Método de Galerkin

En este método se requiere que el promedio ponderado del residuo, sobre todo el dominio, sea cero. Las funciones de peso son las propias funciones de aproximación Ψ_i asociadas a cada a_i. Luego este método establece que:

$$\begin{aligned} &\int_{xa}^{xb} R(x;a)\,\Psi_1(x)\,dx = 0 \\ &\int_{xa}^{xb} R(x;a)\,\Psi_2(x)\,dx = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int_{xa}^{xb} R(x;a)\,\Psi_n(x)\,dx = 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Si existen n parámetros, se formará un sistema de n ecuaciones. La función peso W_i asociada a este método es:

$$W_i(x) = \Psi_i(x) \tag{6.13}$$

el método de Galerkin se expresa, entonces, como:

$$\int_{xa}^{xb} R(x;a)\,\Psi_i(x)\,dx = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{6.14}$$

6.3.- Aplicación del método de los residuos pesados a un problema de valor de contorno

Sea el siguiente problema de valor de contorno:

$$-(1+x)\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) - \frac{d\phi}{dx} = x \qquad 0 < x < 1 \tag{a}$$

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \tag{b}$$

Se desea determinar la solución de este problema de valor de contorno, mediante los criterios de residuos pesados ya descritos. Para ello, se supondrá la siguiente función de aproximación:

$$\phi(x) = x(1-x)(a_1 + a_2\, x) \tag{c}$$

Luego:

$$\frac{d\,\phi(x)}{dx} = a_1(1-2x) + a_2\, x(2-3x) \quad ; \qquad \frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\,a_1 + 2\,a_2(1-3x)$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ec.(a), se obtiene el residuo, el cual viene dado por:

$$R(x;a) = a_1(1+4x) + a_2\left(-2+2x+9x^2\right) - x \tag{d}$$

a.- Método de colocación

Para resolver el problema mediante el método de colocación, se seleccionarán dos puntos de colocación x_i, en $0 < x < 1$; $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 2/3$. Sustituyendo estos valores en la ecuación del residuo [ec.(d)], se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} \tag{e}$$

cuya solución es: $a_1 = 0.1481482$ y $a_2 = 0.0370371$. Luego, la función de aproximación, en este caso viene dada por:

$$\phi_C = x(1-x)\left(0.1481482 + 0.0370371\,x\right) \tag{f}$$

b.- Método de los subdominios

En este caso se seleccionará dos subdominios Δx_i en el dominio; $\Delta x_1 = 0 < x < 0.5$ y $\Delta x_2 = 0.5 < x < 1$. Luego, según este criterio se tendrá:

$$\int_0^{0.5} \left[a_1(1+4x) + a_2\left(-2+2x+9x^2\right) - x \right] dx = 0 \tag{g1}$$

$$\int_{0.5}^{1} \left[a_1(1+4x) + a_2\left(-2+2x+9x^2\right) - x \right] dx = 0 \tag{g2}$$

Integrando las ecuaciones anteriores se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 16 & 29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{h}$$

cuya solución es $a_1 = 0.140$ y $a_2 = 0.040$. Mediante este método, la función de aproximación viene expresada por:

$$\phi_{SD} = x(1-x)(0.1400 + 0.0400x) \tag{i}$$

c.- Método de los mínimos cuadrados

De acuerdo con este método, se debe evaluar en primer lugar las derivadas parciales del residuo con relación a los a_i. Así se tiene que:

$$\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_1} = (1+4x) \qquad \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_2} = \left(-2+2x+9x^2\right)$$

Luego, sustituyendo estas expresiones en la ec.(6.11), se obtiene:

$$\int_0^1 \left[a_1(1+4x) + a_2\left(-2+2x+9x^2\right) - x\right](1+4x)\,dx = 0 \tag{j1}$$

$$\int_0^1 \left[a_1(1+4x) + a_2\left(-2+2x+9x^2\right) - x\right]\left(-2+2x+9x^2\right)dx = 0 \tag{j2}$$

Después de integrar las ecuaciones anteriores, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{31}{3} & \frac{29}{3} \\ \frac{29}{3} & \frac{218}{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{23}{12} \end{Bmatrix} \tag{k}$$

cuya solución es: $a_1 = 0.143067$ y $a_2 = 0.036722$. Y la función de aproximación es:

$$\phi_{MC} = x(1-x)\left(0.143067 + 0.036722x\right) \tag{l}$$

d.- Método de Galerkin

Para resolver el problema mediante el método de Galerkin, nótese que la función de aproximación [ec.(c)], se puede escribir en la siguiente forma:

$$\phi(x) = x(1-x)(a_1 + a_2 x) = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$$

$$\phi(x) = a_1 \Psi_1(x) + a_2 \Psi_2(x) \tag{m}$$

donde, $\Psi_1(x) = x(1-x)$ y $\Psi_2(x) = x^2(1-x)$. Por lo tanto:

$$\int_0^1 \left[a_1(1+4x) + a_2\left(-2+2x+9x^2\right) - x\right][x(1-x)]\,dx = 0 \tag{n1}$$

$$\int_0^1 \left[a_1(1+4x)+a_2\left(-2+2x+9x^2\right)-x\right]\left[x^2(1-x)\right]dx=0 \qquad \text{(n2)}$$

La evaluación de las integrales de las ecuaciones anteriores lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{17}{60} \\ \frac{17}{60} & \frac{7}{30} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{Bmatrix} \qquad \text{(o)}$$

cuya solución es: $a_1 = 0.145038$ y $a_2 = 0.038168$. En este caso la solución aproximada viene dada por:

$$\phi_G = x(1-x)\left(0.145038 + 0.038168\,x\right) \qquad \text{(p)}$$

La solución exacta de este problema de valor de contorno es:

$$\phi(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{Ln}(1+x)}{4\,\mathrm{Ln}\,2} \qquad \text{(q)}$$

En la Tabla 6.1 se comparan los resultados obtenidos mediante los diferentes métodos en algunos puntos del dominio. Como puede apreciarse, la solución aproximada obtenida por el método de Galerkin es superior a la obtenida por los otros métodos.

Tabla 6.1 Comparación de las soluciones aproximadas con la solución exacta.

X	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Colocación	0.00	0.02489	0.03911	0.04089	0.02844	0.00
Subdominios	0.00	0.02368	0.03744	0.03936	0.02752	0.00
Mín. cuadrados	0.00	0.02407	0.03786	0.03962	0.02759	0.00
Galerkin	0.00	0.02443	0.03847	0.04031	0.02809	0.00
Exacta	0.00	0.02424	0.03864	0.04048	0.02800	0.00

6.4.- Aplicación del método de los residuos pesados a un problema de conducción de calor unidimensional

Considérese el problema de flujo de calor, permanente, en una barra de sección transversal circular, térmicamente uniforme, con pérdida de calor por convección desde la superficie. La temperatura en la barra viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{d}{dx}\left(k_x \frac{dT(x)}{dx}\right) + \frac{2h}{r}T(x) = \frac{2h}{r}T_\infty \qquad 0 < x < 10 \qquad \text{(a1)}$$

con las condiciones de contorno:

$$T(0) = 200\ ^{o}F \tag{a2}$$

$$q(10) = 10\ BTU/sg.pu\,lg.^2 \tag{a3}$$

donde, $q = -k_x\, dT(x)/dx$ es el flujo de calor. Las otras constantes en la ec.(a1) son: la conductividad térmica $k_x = 2\ BTU/sg.pu\,lg.\ ^{o}F$; el coeficiente de película $h = 10^{-5}\ BTU/sg.pu\,lg.^2\ ^{o}F$; el radio de la barra $r = 0.002$ pulg. y la temperatura del fluido que rodea la barra $T_\infty = 50\ ^{o}F$. Se desea determinar la solución de dicho problema a través de los criterios de residuos pesados ya estudiados, a partir de un polinomio de segundo grado.

La solución propuesta para el problema de valor de contorno dado por las ecs.(a) es:

$$\tilde{T}(x) = a_1 + a_2\, x + a_3\, x^2 \tag{b}$$

Introduciendo las condiciones de contorno en esta ecuación, se obtiene:

$$\tilde{T}(0) = 200 = a_1$$

$$-2\left.\frac{d\,\tilde{T}(x)}{dx}\right|_{x=10} = 10 = -2\left(a_2 + 20\,a_3\right) \Rightarrow a_2 = -5 - 20\,a_3$$

Sustituyendo los valores de a_1 y a_2 en la ec.(b), resulta:

$$\tilde{T}(x) = 200 - 5x + x(x-20)\,a_3 \tag{c}$$

es decir:

$$\tilde{T}(x) = \phi_1(x) + a\,\phi_2(x) \tag{d}$$

donde:

$$\phi_1(x) = 200 - 5x \qquad\qquad \phi_2(x) = x(x-20) \tag{e}$$

Con los datos del problema, la ec.(a1) se transforma en:

$$-2\frac{d^2T}{dx^2} + 10^{-2}\,T = 0.5 \qquad\qquad 0 < x < 10 \tag{f}$$

Sustituyendo la ec.(d) en la ec.(f), se obtiene el residuo:

$$R(x;a) = -2\frac{d^2\tilde{T}(x)}{dx^2} + 10^{-2}\,\tilde{T}(x) - 0.5 = \left[10^{-2}\,\phi_2(x) - 4\right]a - \left[0.5 - 10^{-2}\,\phi_1(x)\right] \tag{g}$$

a.- Método de colocación

En la ec.(g) existe un único coeficiente a determinar, por lo tanto bastará seleccionar un sólo punto de colocación. Sea este punto $x_1 = 5$. Luego:

$$R(x;a)=\left[10^{-2}\phi_2(5)-4\right]a-\left[0.5-10^{-2}\phi_1(5)\right]=0 \tag{h}$$

donde, $\phi_1(5)=175$ $\phi_2(5)=-75$

luego,

$$(-0.75-4)a-(0.5-1.75)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0.26316 \tag{i}$$

Por lo tanto:

$$\tilde{T}_C(x)=\phi_1(x)+0.26316\phi_2(x) \tag{j}$$

b.- Método de los subdominios

De nuevo, puesto que sólo hay un parámetro a determinar, $\Delta x_1=0<x<10$, y por lo tanto:

$$R(x;a)=\int_0^{10}\left\{\left[10^{-2}\phi_2(x)-4\right]a-\left[0.5-10^{-2}\phi_1(x)\right]\right\}dx=0 \tag{k}$$

$$-\frac{140}{3}a-\frac{25}{2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=0.26786 \tag{l}$$

Luego:

$$\tilde{T}_{SD}(x)=\phi_1(x)+0.26786\phi_2(x) \tag{m}$$

c.- Método de los mínimos cuadrados

En este método, se debe evaluar en primer lugar, la derivada parcial del residuo con relación a cada a_i; en este caso:

$$\frac{\partial R(x;a)}{\partial a}=\left[10^{-2}\phi_2(x)-4\right] \tag{n}$$

y por lo tanto:

$$R(x;a)=\int_0^{10}\left\{\left[10^{-2}\phi_2(x)-4\right]a-\left[0.5-10^{-2}\phi_1(x)\right]\right\}\left[10^{-2}\phi_2(x)-4\right]dx=0 \tag{0}$$

$$\frac{656}{3}a-\frac{695}{12}=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=0.26486 \tag{p}$$

Luego:

$$\tilde{T}_{MC}(x)=\phi_1(x)+0.26486\phi_2(x) \tag{q}$$

d.- Método de Galerkin

La solución de este problema mediante el método de Galerkin es:

$$R(x;a)=a\int_0^{10}\left[10^{-2}\,\phi_2(x)-4\right]\phi_2(x)\,dx-\int_0^{10}\left[0.5-10^{-2}\,\phi_1(x)\right]\phi_2(x)\,dx=0 \qquad (r)$$

$$3200\,a-\frac{2375}{3}=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=0.24739 \qquad (s)$$

y por lo tanto:

$$\tilde{T}_G(x)=\phi_1(x)+0.24739\,\phi_2(x) \qquad (t)$$

Evaluando estas cuatro soluciones en $x=10$, se obtiene:

$$\tilde{T}_C(10)=123.68\,^{o}F \qquad \tilde{T}_{SD}(10)=123.21\,^{o}F \qquad \tilde{T}_{MC}(10)=123.51\,^{o}F \qquad \tilde{T}_C(10)=125.26\,^{o}F \qquad (u)$$

La solución exacta es $T(10)=125.94\,^{o}F$. Como puede apreciarse, la solución obtenida a través del método de Galerkin, es superior a la obtenida mediante los otros criterios de residuos pesados.

6.5.- Formulación Galerkin/(mef) de problemas de la mecánica de los sólidos: Caso tridimensional

El problema de valor de contorno asociado a las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un sólido, tridimensional, elástico lineal es, como ya se vio en el capítulo anterior:

a.- Ecuaciones de equilibrio interno

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_x=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_y=0 \qquad \text{en} \quad V \qquad (6.15a)$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=0$$

b.- Condiciones esenciales de contorno

$$u=\bar{u} \qquad v=\bar{v} \qquad w=\bar{w} \qquad \text{en } S_1 \qquad (6.15b)$$

c.- Condiciones naturales de contorno

$$\bar{T}_x=\sigma_{xx}\,n_x+\tau_{xy}\,n_y+\tau_{xz}\,n_z$$

$$\bar{T}_y=\tau_{xy}\,n_x+\sigma_{yy}\,n_y+\tau_{yz}\,n_z \qquad \text{en } S_2 \qquad (6.15c)$$

$$\overline{T}_z = \tau_{xz}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y + \sigma_{zz}\, n_z$$

d.-Las ecuaciones deformación-desplazamiento son:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u,x \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} = v,y \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z} = u,z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = v,x + u,y \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w,y + v,z \qquad (6.16)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u,z + w,x$$

e.- Ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{yy} \qquad (6.17)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \qquad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}; \qquad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

donde:

$$e=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$$

y

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad ; \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

La aplicación del método **mrp** al sistema de ecuaciones (6.15a), conduce a:

$$\int_V \left[\sigma_{xx},x + \tau_{xy},y + \tau_{xz},z + F_x\right] W_1\, dV = 0 \qquad (6.18a)$$

$$\int_V \left[\tau_{xy},x + \sigma_{yy},y + \tau_{yz},z + F_y\right] W_2\, dV = 0 \qquad (6.18b)$$

$$\int_V \left[\tau_{xz},x + \tau_{yz},y + \sigma_{zz},z + F_z\right] W_3\, dV = 0 \qquad (6.18c)$$

donde W_1 (la variación δu), W_2 (la variación δv) y W_3 (la variación δw), son las funciones de interpolación a ser utilizadas.

A esta altura es conveniente hacer notar lo siguiente:

1. Como puede observarse, en las ecuaciones anteriores aparecen derivadas de mayor orden que en la formulación variacional $\left[\text{ver, por ejemplo la ec. (4.86)}\right]$. Esto implica una

exigencia mayor, en cuanto a continuidad se refiere, de las funciones de interpolación a seleccionar.

2. La ecuación anterior se refiere, únicamente, a los puntos en el interior del dominio del problema, y no está asociada a ningún tipo de condiciones de contorno sobre el mismo.

Para mostrar como se puede solventar estas dos dificultades, considérese, a modo de ejemplo, la primera de las ecs.(6.15):

$$\int_V \left[\sigma_{xx},x+\tau_{xy},y+\tau_{xz},z+F_x\right]W_1\,dV=\int_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}W_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}W_1\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{xz}W_1\right)\right]dV+$$

$$\int_V F_x\,W_1\,dV-\int_V\left[\sigma_{xx}\,W_1,x+\tau_{xy}\,W_1,y+\tau_{xz}\,W_1,z\right]dV \qquad (6.19)$$

pero, de acuerdo con el teorema de la divergencia, la primera integral del segundo miembro de la ecuación anterior, puede transformarse en:

$$\int_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}W_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}W_1\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{xz}W_1\right)\right]dV=\int_{S_2}\left[\sigma_{xx}nx+\tau_{xy}ny+\tau_{xz}nz\right]W_1\,dS_2 \qquad (6.20)$$

Luego, la ec.(6.19) se transforma en:

$$\int_V\left[\sigma_{xx}\,W_1,x+\tau_{xy}\,W_1,y+\tau_{xz}\,W_1,z\right]dV=-\int_V\left[\sigma_{xx}\,W_1,x+\tau_{xy}\,W_1,y+\tau_{xz}\,W_1,z\right]dV+$$

$$\int_V F_x\,W_1\,dV+\int_{S_2}\left[\sigma_{xx}nx+\tau_{xy}ny+\tau_{xz}nz\right]W_1\,dS_2 \qquad (6.21)$$

Nótese que con este procedimiento, la exigencia del orden de continuidad de las funciones de interpolación se reduce y, a su vez, se producen los términos asociados con las condiciones (naturales) de contorno. Sustituyendo las ecuaciones constitutivas y las relaciones deformación-desplazamiento anteriores en la ec.(6.21), se obtiene:

$$\int_V\left[(\lambda+2\mu)u,x\,W_1,x+\mu u,y\,W_1,y+\mu v,x\,W_1,y+\lambda v,y\,W_1,x+\mu u,z\,W_1,z+\right.$$

$$\left.\mu w,x\,W_1,z+\lambda w,z\,W_1,x\right]dV=\int_V\bar{F}_x\,W_1\,dV+$$

$$\int_{S_2}\left[(\lambda+2\mu)u,x+\lambda(v,y+w,z)\right]n_x+\mu(u,y+v,x)n_y+\mu(u,z+w,x)n_z\Big]W_1\,dS_2 \qquad (6.22)$$

Como siempre, en el interior de cada elemento finito, el campo de los desplazamientos se aproximará, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} u&=\Psi_j\,u_j && j=1,2,....,r\\ v&=\Psi_j\,v_j && j=1,2,....,r\\ w&=\Psi_j\,w_j && j=1,2,....,r \end{aligned} \qquad (6.23a)$$

donde r es el número de nodos por elemento. De acuerdo con el método de Galerkin, las funciones peso son las mismas funciones de interpolación, luego se tendrá que la función peso será, en este caso:

$$W_1 = \Psi_i \qquad i=1,2,....,r \tag{6.23b}$$

Sustituyendo las ecs.(6.21) en la ec.(6.20) se obtiene, después de agrupar términos:

$$\int_V \{[(\lambda+2\mu)\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+\mu(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}+\Psi_{i,z}\Psi_{j,z})]u_j + [\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,y}+\mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,x}]v_j +$$

$$[\lambda\Psi_{i,x}\Psi_{j,z}+\mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,x}]w_j\}dV = \int_V \bar{F}_x\Psi_i\,dV + \int_{S_2}\bar{T}_x\Psi_i\,dS_2 \tag{6.24a}$$

donde:

$$\bar{T}_x = [(\lambda+2\mu)u,x+\lambda(v,y+w,z)]n_x+\mu(u,y+v,x)n_y+\mu(u,z+w,x)n_z$$

Nótese que la ec.(6.22) es, a menos del término, $\sum_{i=1}^{n}\bar{P}_{xi}$, idéntica a la ec.(4.99a). Sin embargo, como este término corresponde a la resultante de la componente, en la dirección x, de las fuerzas concentradas externas aplicadas en el nodo i, es por lo tanto, un valor conocido, y su introducción en el sistema global de ecuaciones, no representa ninguna dificultad.

Las dos restantes ecuaciones del sistema (6.18) se deducen del mismo modo al descrito. El lector podrá comprobar que el resultado final es:

$$\int_V \{[\lambda\Psi_{i,y}\Psi_{j,x}+\mu\Psi_{i,x}\Psi_{j,y}]u_j + [(\lambda+2\mu)\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}+\mu(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+\Psi_{i,z}\Psi_{j,z})]v_j +$$

$$[\lambda\Psi_{i,y}\Psi_{j,z}+\mu\Psi_{i,z}\Psi_{j,y}]w_j\}dV = \int_V \bar{F}_y\Psi_i\,dV + \int_{S_2}\bar{T}_y\Psi_i\,dS_2 \tag{6.24b}$$

donde:

$$\bar{T}_y = \mu(u,y+v,x)n_x+[(\lambda+2\mu)v,y+\lambda(u,x+w,z)]n_y+\mu(w,y+v,z)n_z$$

y, finalmente

$$\int_V \{[\lambda\Psi_{i,z}\Psi_{j,x}+\mu\Psi_{i,x}\Psi_{j,z}]u_j + [\lambda\Psi_{i,z}\Psi_{j,y}+\mu\Psi_{i,y}\Psi_{j,z}]v_j +$$

$$[(\lambda+2\mu)\Psi_{i,z}\Psi_{j,z}+\mu(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}+\Psi_{i,y}\Psi_{j,y})]w_j\}dV = \int_V \bar{F}_z\Psi_i\,dV + \int_{S_2}\bar{T}_z\Psi_i\,dS_2 \tag{6.24c}$$

donde:

$$\bar{T}_z = \mu(u,z+w,x)n_x+\mu(w,y+v,z)n_y+[(\lambda+2\mu)w,z+\lambda(u,x+v,y)]n_z$$

Como puede apreciarse, el sistema de ec.(6.24) es idéntico al sistema de ec.(4.97).

6.6.- Formulación Galerkin/(mef) de problemas de la mecánica de los sólidos: Caso axisimétrico.

El problema de valor de contorno asociado a las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un sólido axisimétrico, elástico lineal vienen dadas por:

a.- Ecuaciones de equilibrio interno

$$\frac{\partial \sigma rr}{\partial r} + \frac{\partial \tau rz}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \tag{6.25a}$$

$$\frac{\partial \tau rz}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \tag{6.25b}$$

b.- Condiciones esenciales de contorno

$$u = \bar{u} \qquad\qquad w = \bar{w} \qquad \text{en } S_1 \tag{6.25c}$$

c.- Condiciones naturales de contorno

$$\bar{T}_r = \sigma_{rr}\, n_r + \tau_{rz}\, n_z$$

$$\text{en } S_2 \tag{6.25d}$$

$$\bar{T}_z = \tau_{rz}\, n_r + \sigma_{zz}\, n_z$$

d.-Las ecuaciones deformación-desplazamiento son:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = u,r \qquad\qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = w,z \qquad\qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = w,r + u,z \tag{6.26}$$

e.- Ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{rr}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{zz} \tag{6.27}$$

$$\tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}$$

donde ahora:

$$e=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}$$

y

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad ; \qquad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}=G$$

La aplicación del método del **mrp** al sistema de ecuaciones (6.25), conduce a:

$$\int_A\left[\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rr}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{rz}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+F_r\right]W_1\,2\pi r\,dr\,dz=0 \tag{6.28a}$$

$$\int_A\left[\frac{\partial}{\partial r}\tau_{rz}+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}+\frac{\tau_{rz}}{r}+F_z\right]W_2\,2\pi r\,dr\,dz=0 \tag{6.28b}$$

donde W_1 (la variación δu), y W_2 (la variación δw), son las funciones de interpolación a ser utilizadas. El sistema de ecuaciones anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$2\pi\int_A\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr})+\frac{\partial}{\partial z}(r\tau_{rz})-\sigma_{\theta\theta}+rF_r\right]W_1\,dr\,dz=0 \tag{6.29a}$$

$$2\pi\int_A\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{\partial}{\partial z}(r\sigma_{zz})+rF_z\right]W_2\,dr\,dz=0 \tag{6.29b}$$

Después de aplicar el teorema de la divergencia, y simplificar el término común 2π ,este sistema de ecuaciones se transforma en:

$$\int_A\left[\sigma_{rr}\,W_1,r+\tau_{rz}\,W_1,z+\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}W_1\right]r\,dr\,dz=\int_A r\,\bar{F}_r W_1\,dr\,dz+\int_{S_2}[\sigma_{rr}nr+\tau_{rz}nz]r\,W_1\,dr\,dz \tag{6.30a}$$

$$\int_A[\tau_{rz}\,W_2,r+\sigma_{zz}\,W_2,z\,]r\,dr\,dz=\int_A r\,\bar{F}_z W_2\,dr\,dz+\int_{S_2}[\tau_{rz}nr+\sigma_{zz}nz\,]r\,W_2\,dr\,dz \tag{6.30b}$$

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas y las relaciones deformación-desplazamiento anteriores en las ecs.(6.30), se obtiene:

$$\int_A\left\{\left[r(\lambda+2\mu)u,r\,W_1,r+\mu\,r\,u,z\,W_1,z+(\lambda+2\mu)\frac{u}{r}W_1+\lambda\left(u,r\,W_1+\frac{u}{r}W_1,r\right)\right]u_j+\right.$$

$$\left.[r\lambda w,z\,W_1,r+\lambda w,z\,W_1+r\,\mu w,r\,W_1,z]\,w_j\right\}drdz=$$

$$\int_A r\, W_1 \overline{F}_r \, drdz + \int_{S_2} r\, W_1 \overline{T}_r \, dS_2 \qquad (6.31a)$$

$$\int_A \{ [\lambda(r\,u,r\,W_2,z + u\,W_2,z) + \mu\, r\,u,z\,W_2,r]\, u_j +$$

$$[(\lambda + 2\mu) r\, w,z\,W_2,z + \mu\, r\, w,r\,W_2,r]\, w_j \} drdz \; =$$

$$\int_A r\, W_2 \overline{F}_z \, drdz + \int_{S_1} r\, W_2 \overline{T}_z \, dS_1 \qquad (6.31b)$$

Sobre cada elemento (e), el campo de los desplazamientos se aproximará del siguiente modo:

$$u = \Psi_j u_j \qquad\qquad w = \Psi_j w_j \qquad j = 1,2,.....,r \qquad (6.32a)$$

y, de acuerdo con el método de Galerkin/mef, se tiene que:

$$W_1 = W_2 = \Psi_i \qquad i = 1,2,.....,r \qquad (6.32b)$$

donde r es el número de nodos por elemento. Sustituyendo las ecs.(6.32) en las ecs.(6.31) se obtiene, después de agrupar términos:

$$\int_A \left\{ \left[r(\lambda + 2\mu)\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \mu\, r\, \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + (\lambda + 2\mu)\frac{\Psi_i \Psi_j}{r} + \lambda(\Psi_{i,r}\Psi_j + \Psi_i \Psi_{j,r}) \right] u_j + \right.$$

$$\left. [r\,\lambda \Psi_{i,r}\Psi_{j,z} + \lambda \Psi_i \Psi_{j,z} + r\,\mu \Psi_{i,z}\Psi_{j,r}] w_j \right\} drdz =$$

$$\int_A r\, \Psi_i \overline{F}_r \, drdz + \int_{S_1} r\, \Psi_i \overline{T}_r \, dS_1 \qquad (6.33a)$$

donde:

$$\overline{T}_r = \left[(\lambda + 2\mu)u,r + \lambda\left(\frac{u}{r} + w,z\right) \right] n_r + \mu(w,r + u,z)\, n_z$$

$$\int_A \{ [\lambda(r\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} + \Psi_{i,z}\Psi_j) + \mu\, r\, \Psi_{i,r}\Psi_{j,z}]\, u_j + [(\lambda + 2\mu) r\, \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \mu\, r\, \Psi_{i,r}\Psi_{j,r}]\, w_j \} dA \; =$$

$$\int_A r\, \Psi_i \overline{F}_z \, drdz + 2\pi \int_{S_1} r\, \Psi_i \overline{T}_z \, dS_1 \qquad (6.33b)$$

donde:

$$\overline{T}_z = \mu(w,r + u,z)\, n_r + \left[(\lambda + 2\mu)w,z + \lambda\left(\frac{u}{r} + u,r\right) \right] n_z$$

Nótese que el sistema de ecuaciones (6.33) es, a menos de los términos, $\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{ri}$ y $\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_{zi}$, idéntico al de las ec.(4.106). Sin embargo, como esto términos corresponden a las resultantes de las componentes, en las dirección r y z, de las fuerzas concentradas externas aplicadas en el nodo i es, por lo tanto, un valor conocido, y su introducción en el sistema global de ecuaciones, no representa ninguna dificultad.

6.7.- El método de Galerkin/Mef aplicado a la mecánica de los fluidos

El método de los elementos finitos solamente comenzó a ser admitido, como la poderosa herramienta numérica que es, en la solución de problemas asociados a la mecánica de los fluidos, a principios de la década de los setenta. Existen varias razones que explican este hecho, pero tal vez, la mas importante se deba al éxito alcanzado por el uso del método de las diferencias finitas, en la solución de los problemas relacionados con esta área. Las grandes inversiones realizadas en el desarrollo de software para la implementación de este método, es la principal razón por la cual, por mucho tiempo, los investigadores de esta área, se hayan rehusado a abordar otros métodos alternativos. Sin embargo, en los últimos treinta años, el método de los elementos finitos ha venido siendo ampliamente utilizado, en la solución de una gran gama de problemas relacionados con la mecánica de los fluidos.

En este capítulo se presentará la formulación Galerkin asociada con el método de los elementos finitos, de las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos viscosos, incomprensibles e isotérmicos, tanto Newtonianos como los llamados fluidos Newtonianos generalizados.

6.7.1.- Ecuaciones básicas asociadas a la mecánica de los fluidos

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un fluido son las llamadas ecuaciones de conservación (la ecuación de continuidad, la de conservación de momento y la de la conservación de la energía). Si se considera que el fluido tiene un comportamiento isotérmico, esta última ecuación no tiene relevancia. En esta sección se resumen las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento del flujo de fluidos viscosos e incompresibles bajo la hipótesis que el fluido es isotérmico, para flujos tridimensionales y axisimétricos. La deducción de dichas ecuaciones escapa al objetivo del texto y pueden encontrarse en cualquier libro del área.

6.7.1a.- Ecuación de continuidad: caso tridimensional

La ecuación de continuidad para el caso general de un fluido en régimen no permanente, viene dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \qquad (6.34)$$

donde ρ es la densidad del fluido y u, v y w son las componentes de la velocidad del fluido en las direcciones x, y, z, respectivamente.

Si el fluido es incompresible, $\rho = \text{constante}$ y la densidad no es función ni del espacio ni del tiempo. Luego, para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6.35}$$

6.7.1b.- Ecuación de continuidad: caso axisimétrico

Para el caso axisimétrico, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6.36}$$

6.7.1c.- Ecuaciones de movimiento: caso tridimensional

Las ecuaciones de movimiento para el caso general tridimensional de un fluido incompresible en régimen no permanente, tomando en consideración la simetría del tensor de tensiones, vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)&=F_X-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \sigma xx}{\partial x}+\frac{\partial \tau xy}{\partial y}+\frac{\partial \tau xz}{\partial z}\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)&=F_Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau xy}{\partial x}+\frac{\partial \sigma yy}{\partial y}+\frac{\partial \tau yz}{\partial z}\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)&=F_Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau xz}{\partial x}+\frac{\partial \tau yz}{\partial y}+\frac{\partial \sigma zz}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6.37}$$

donde F_X, F_Y y F_Z son las componentes de fuerza devolumen en las direcciones x,y,z.

6.7.1d.- Ecuaciones de movimiento: caso axisimétrico

Las ecuaciones de movimiento para el caso general axisimétrico de un fluido incompresible, en régimen no permanente son:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=F_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \sigma rr}{\partial r}+\frac{\partial \tau rz}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} \tag{6.38a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \sigma rz}{\partial r}+\frac{\tau rz}{r}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{6.38b}$$

6.7.1e.- Ecuaciones constitutivas

Para resolver las ecuaciones anteriores es necesario establecer la relación entre los esfuerzos y el campo de las velocidades. Las distintas formas de expresar dicha relación, da origen a los diferentes modelos reológicos, los cuales tratan de caracterizar el comportamiento de un fluido dado. Para un fluido puramente viscoso, el esfuerzo cortante es, únicamente, función de la tasa de deformación; es decir:

$$\tau = \tau(\gamma) \tag{6.39}$$

donde γ representa el tensor tasa de deformación. Casos especiales de fluidos puramente viscosos son los fluidos Newtonianos y los llamados Newtonianos generalizados.

Un fluido Newtoniano es aquel para el cual el esfuerzo cortante es directamente proporcional a la tasa de deformación. Luego, para este tipo de fluido, la ec.(6.39) se transforma en:

$$\tau = \mu\gamma \tag{6.40}$$

donde μ es la viscosidad (constante) del fluido.

La definición de un fluido Newtoniano generalizado se deriva, como una extensión (por analogía) del modelo Newtoniano, para tomar en consideración el comportamiento no-lineal entre el esfuerzo y la deformación, observado en muchos fluidos de naturaleza compleja. La forma general de este modelo es análoga a la ec.(6.40); es decir:

$$\tau = \eta(\gamma)\gamma \tag{6.41}$$

donde $\eta(\gamma)$ es la llamada viscosidad aparente, la cual es una función de la magnitud del tensor de deformación $|\gamma|$, la cual está dada por:

$$|\gamma| = \left(\frac{1}{2}\mathrm{I}_2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.42}$$

donde I_2 es el segundo invariante del tensor tasa de deformación. La forma de la función $\eta(\gamma)$ $[\text{es decir}; \eta(\mathrm{I}_2)]$, conduce a diferentes modelos empíricos los cuales tratan de ajustar los datos experimentales al comportamiento real del fluido. Los siguientes, son dos de los modelos mas utilizados en la predicción del comportamiento no-Newtoniano, observado en muchos fluidos considerados puramente viscosos.

- **Modelo Ley de Potencias (Ostwald y de Waele)**

  En este modelo, la viscosidad aparente se expresa:

$$\eta(\gamma) = \mathrm{m}|\gamma|^{\mathrm{n}-1} \tag{6.43}$$

donde m es el llamado índice de consistencia y n es el índice de ley de potencias.

- **Modelo de Carreau**

El modelo de Carreau se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\eta(\gamma) - \eta_\infty}{\eta_o - \eta_\infty} = \left[1 + (\lambda|\gamma|)^2\right]^{\frac{\mathrm{n}-1}{2}} \tag{6.44}$$

donde η_o es la viscosidad a tasa de corte cero, η_∞ es una viscosidad característica (newtoniana) a una tasa de corte muy alta (usualmente $\eta_\infty = 0$), λ es un tiempo característico y n es el índice de potencias

a.- Caso tridimensional

Las ecuaciones constitutivas para el caso tridimensional de un fluido viscoso e incompresible, pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\sigma_{xx} = 2\,\eta(I_2)u,x \qquad \sigma_{yy} = 2\,\eta(I_2)v,y \qquad \sigma_{zz} = 2\,\eta(I_2)w,z$$

$$\tau_{xy} = \eta(I_2)(u,y+v,x) \qquad \tau_{yz} = \eta(I_2)(v,z+w,y) \qquad \tau_{xz} = \eta(I_2)(u,z+w,x) \tag{6.45}$$

donde u, v y w, son las componentes de la velocidad en las direcciones x,y,z, respectivamente, y $\eta(I_2)$ es la viscosidad aparente del fluido.

Para el caso tridimensional, el segundo invariante del tensor tasa de deformación en términos de las componentes de la velocidad, viene dado por:

$$I_2 = \left[2(u,x)^2 + 2(v,y)^2 + 2(w,z)^2 + (v,x+u,y)^2 + (w,y+v,z)^2 + (u,z+w,x)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.46}$$

b.- Caso axisimétrico

En el caso axisimétrico, las respectivas ecuaciones constitutivas para un fluido viscoso e incompresible son:

$$\sigma_{rr} = 2\,\eta(I_2)u,r \qquad \sigma_{zz} = 2\,\eta(I_2)w,z$$

$$\sigma_{rz} = \eta(I_2)(u,z+w,r) \qquad \sigma_{\theta\theta} = 2\,\eta(I_2)u,r \tag{6.47}$$

donde ahora u y w, son las componentes de la velocidad en las direcciones radia y axial, respectivamente.

En el caso axisimétrico, el segundo invariante del tensor tasa de deformación en términos de las componentes de la velocidad, viene dado por:

$$I_2 = \left[2(u,r)^2 + 2\left(\frac{u}{r}\right)^2 + 2(w,z)^2 + (w,r+u,z)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.48}$$

6.7.1f.- Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno correspondientes a los problemas de la mecánica de los fluidos, son similares a las existentes en los problemas relacionados con la mecánica de los sólidos y pueden mostrarse con una figura similar a la Fig.4.8.

a.- Caso tridimensional

En el caso tridimensional, las condiciones esenciales de contorno son:

$$u = \bar{u}\,; \qquad v = \bar{v}\,; \qquad w = \bar{w} \qquad \text{en } S_1 \tag{6.49a}$$

y las condiciones naturales de contorno son:

$$\begin{aligned} \bar{T}_x &= (-p + \sigma_{xx})n_x + \tau_{xy}\, n_y + \tau_{xz}\, n_z \\ \bar{T}_y &= \tau_{xy}\, n_x + (-p + \sigma_{yy})n_y + \tau_{yz}\, n \qquad \text{en } S_2 \\ \bar{T}_z &= \tau_{xy}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y + (-p + \sigma_{zz})n_z \end{aligned} \tag{6.49b}$$

b.- Caso Axisimétrico

Las condiciones esenciales de contorno para el caso axisimétrico vienen dadas por:

$$u = \bar{u}\,; \qquad w = \bar{w} \qquad \text{en } S_1 \tag{6.50a}$$

y las respectivas condiciones naturales de contorno, son:

$$\begin{aligned} \bar{T}_r &= (-p + \sigma_{rr})n_r + \tau_{rz}\, n_z \\ & \qquad\qquad \text{en } S_2 \\ \bar{T}_z &= \tau_{rz}\, n_r + (-p + \sigma_{zz})n_z \end{aligned} \tag{6.50b}$$

6.7.2.- Formulación Galerkin/(mef) de las ecuaciones de conservación: modelo U V P

En esta sección se presentará el método de Galerkin asociado con el método de los elementos finitos, de las ecuaciones de continuidad para fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos, en régimen permanente. Adicionalmente se considerará que las fuerzas de inercia son despreciables en comparación con las fuerzas viscosas y la presión.

6.7.2a.-Caso tridimensional

Con las simplificaciones anteriormente enunciadas, el problema de valor de contorno a resolver, para el caso tridimensional, es el siguiente:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma xx}{\partial x} + \frac{\partial \tau xy}{\partial y} + \frac{\partial \tau xz}{\partial z} + F_X = 0 \tag{6.51a}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau xy}{\partial x} + \frac{\partial \sigma yy}{\partial y} + \frac{\partial \tau yz}{\partial z} + F_Y = 0 \tag{6.51b}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau xz}{\partial x}+\frac{\partial \tau yz}{\partial y}+\frac{\partial \sigma zz}{\partial z}+F_Z=0 \tag{6.51c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6.51d}$$

El problema de valor de contorno se completa con las condiciones de contorno dadas por las ecs.(6.49), con las relaciones constitutivas de las ecs.(6.45). Luego, en términos de las velocidades, el **mrp** aplicado a las ecuaciones conduce a:

$$\int_V \left\{ (-p,x+2\eta u,xx)+\frac{\partial}{\partial y}[\eta(u,y+v,x)]+\frac{\partial}{\partial z}[\eta(u,z+w,x)]+F_X \right\} W_1\,dx\,dy\,dz=0 \tag{6.52a}$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[\eta(u,y+v,x)]+(-p,y+2\eta v,yy)+\frac{\partial}{\partial z}[\eta(v,z+w,y)]+F_y \right\} W_2\,dx\,dy\,dz=0 \tag{6.5b}$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[\eta(u,z+w,x)]+\frac{\partial}{\partial y}[\eta(v,z+w,y)]+(-p,z+2\eta wzz)F_X \right\} W_3\,dx\,dy\,dz=0 \tag{6.52c}$$

$$\int_V (u,x+v,y+w,z)\,W_4\,dV=0 \tag{6.52d}$$

donde, W_1 (la variación δu); W_2 (la variación δv), W_3 (la variación δw) y W_4 (la variación δp), son las funciones de interpolación a ser utilizadas. En las ecuaciones anteriores, por comodidad de escritura se ha tomado $\eta=\eta(I_2)$.

Como se puede notar, si en las ecuaciones constitutivas dadas por las ecs.(6.17) se hace $\lambda=0$ y $\mu=\eta$, se obtienen las ecuaciones constitutivas (6.45) y, a menos de los términos relacionados con la presión, las ecuaciones de movimiento del sistema (6.51), son las mismas ecuaciones de que gobiernan el problema de elasticidad tridimensional dadas por el sistema (4.48). De modo que para obtener la formulación Galerkin/mef de estas ecuaciones, basta agregar a las ecs.(6.24) la contribución de los tres primeros términos de las ecs.(6.51b,c y d). Es importante notar que si no se integran por partes estos términos, el sistema de ecuaciones final será no simétrico. De modo que con la finalidad obtener un sistema de ecuaciones simétrico, se deberá integrar por partes estos términos; es decir:

$$-\int_V p,x\,W_1\,dx\,dy\,dz=\int_V p\,W_1,x\,dx\,dy\,dz-\int_{S_2} p\,W_1\,nx\,dS_2$$

$$-\int_V p,y\,W_2\,dx\,dy\,dz=\int_V p\,W_2,y\,dx\,dy\,dz-\int_{S_2} p\,W_2\,ny\,dS_2 \tag{6.53}$$

$$-\int_V p,z\,W_3\,dx\,dy\,dz=\int_V p\,W_3,z\,dx\,dy\,dz-\int_{S_2} p\,W_3\,nz\,dS_2$$

De modo que, la formulación del **mrp** de las ecuaciones de conservación, vendrá dada por:

$$\int_V \left[(p+2\eta u,x)W_{1,x} + \eta(u,y+v,x)W_{1,y} + \eta(u,z+w,x)W_{1,z}\right] dx\,dy\,dz = \int_V F_x W_1\,dx\,dy\,dz + \int_V \overline{T}_x W_1\,dS_2 \qquad (6.54a)$$

$$\int_V \left[\eta(u,y+v,x)W_{2,x} + (p+2\eta v,y)W_{2,y} + \eta(v,z+w,y)W_{2,z}\right] dx\,dy\,dz = \int_V F_y W_2\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \overline{T}_y W_2\,dS_2 \qquad (6.54b)$$

$$\int_V \left[\eta(u,z+w,x)W_{3,x} + \eta(v,z+w,y)W_{3,y} + (p+2\eta w,z)W_{3,z}\right] dx\,dy\,dz = \int_V F_z W_3\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \overline{T}_z W_3\,dS_2 \qquad (6.54c)$$

$$\int_V (u,x+v,y+w,z)W_4\,dx\,dy\,z = 0 \qquad (6.54d)$$

donde:

$$\overline{T}_x = \int_{S_2} \left[(-p+2\eta u,x)nx + \eta(u,y+v,x)ny + \eta(u,z+w,x)nz\right] dS_2 \qquad (6.55a)$$

$$\overline{T}_y = \int_{S_2} \left[\eta(u,y+v,x)ny + (-p+2\eta v,y)ny + \eta(v,z+w,y)nz\right] dS_2 \qquad (6.55b)$$

$$\overline{T}_z = \int_{S_2} \left[\eta(u,z+w,x)ny + \eta(v,z+w,y)nz + (-p+2\eta w,z)nz\right] dS_2 \qquad (6.55c)$$

A esta altura es importante hacer notar lo siguiente: aun cuando la presión aparece en los términos del contorno T_x, T_y y T_z, y es una variable primaria, su especificación no constituye una condición esencial de contorno ya que W_4 [es decir, la variación de la presión (δp)], no aparece, como puede apreciarse, en las ecuaciones anteriores, en las integrales de contorno de la formulación. Adicionalmente, en las ecuaciones de movimiento, la presión no aparece diferenciada, por lo que se podrá utilizar, a nivel de cada elemento, funciones de interpolación lineal para aproximar las velocidades y una constante para aproximar la presión o, funciones cuadráticas para las velocidades y funciones lineales para la presión. En general las funciones de interpolación usadas en la aproximación de la presión deberán ser un grado menor que las utilizadas para aproximar las velocidades. Luego, de acuerdo con el método de Galerkin/mef, en el interior de cada elemento finito, las velocidades y presión se aproximarán mediante:

$$u = \Psi_j u_j \qquad v = \Psi_j v_j \qquad w = \Psi_j w_j \qquad j=1,2,....,r$$
$$p = \Phi_J p_J \qquad J=1,2,....,s \qquad (6.56)$$

donde r es el número de nodos por elemento y s representa en número de nodos, a nivel de cada elemento, mediante los cuales se interpola la presión. Si r es el número de nodos a través de los cuales se interpolan las velocidades, entonces $r > s.$. De acuerdo con el método de Galerkin, las funciones peso son las mismas funciones de interpolación, luego se tendrá que la función peso será, en este caso:

$$W_1 = W_2 = W_3 = \Psi_i \qquad i=1,2,...,r \tag{6.57a}$$

$$W_4 = \Phi_i \qquad i=1,2,...,s \tag{6.57b}$$

Sustituyendo las ecs.(6.56) y (6.57) en las ecs (6.54), se obtiene, finalmente, la formulación Galerkin/mef del modelo U-V-P, la cual viene dada por:

$$\int_V \Big[2\eta \Psi_{i,x} \Psi_{j,x} + \eta\big(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\big)\Big] u_j + \Big[\eta \Psi_{i,y}\, \Psi_{j,x}\Big] v_j + \Big[\eta \Psi_{i,z}\, \Psi_{j,x}\Big] w_j + \Psi_{i,x}\, \Phi_J\, p_J \Big\} dx\, dy\, dz = \int_V \overline{F}_x \Psi_i \, dx\, dy\, dz + \int_V \overline{T}_x\, \Psi_i \, dS_2 \tag{6.58a}$$

De forma análoga, las ecuaciones finales correspondientes a las direcciones *y* y *z*, vienen dadas por:

$$\int_V \Big[\eta \Psi_{i,x}\, \Psi_{j,y}\Big] u_j + \Big[2\eta \Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \eta\big(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\big)\Big] v_j + \Big[\eta \Psi_{i,z}\, \Psi_{j,y}\Big] w_j + \Psi_{i,y}\, \Phi_J\, p_J \Big\} dx\, dy\, dz = \int_V \overline{F}_y \Psi_i \, dx\, dy\, dz + \int_V \overline{T}_y\, \Psi_i \, dS_2 \tag{6.58b}$$

$$\int_V \Big[\eta \Psi_{i,x}\, \Psi_{j,z}\Big] u_j + \Big[\eta \Psi_{i,y}\, \Psi_{j,z}\Big] v_j + \Big[2\eta \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \eta\big(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\big)\Big] w_j + \Psi_{i,z}\Phi_J p_J \Big\} dx\, dy\, dz = \int_V \overline{F}_z \Psi_i \, dx\, dy\, dz + \int_{S_2} \overline{T}_z\, \Psi_i \, dS_2 \tag{6.58c}$$

y la ecuación de continuidad:

$$\int_V \Big[\Psi_{j,x}\, \Phi_i\, u_j + \Psi_{j,y}\, \Phi_i\, v_j + \Psi_{j,z}\, \Phi_i\, w_j \Big] dx\, dy\, dz \tag{6.68d}$$

En forma matricial, a nivel de cada elemento (e), las ecs.(6.58) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{14} \\ & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{24} \\ \text{Simétrica} & & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{34} \\ & & & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^{(e)}\} \\ \{v^{(e)}\} \\ \{w^{(e)}\} \\ \{p^{(e)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{i1}^{(e)}\} \\ \{f_{i2}^{(e)}\} \\ \{f_{i3}^{(e)}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \tag{6.59}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = \int_V \left\{\left[2\eta\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \eta\left(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \int_V \eta\Psi_{i,y}\Psi_{j,x}\,dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} = \int_V \left[\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,x}\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{iJ}^{(e)}\right]^{14} = \int_V \Psi_{i,x}\Phi_J\,dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} = \int_V \left[2\eta\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \eta\left(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right)\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} = \int_V \eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,y}\,dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{iJ}^{(e)}\right]^{24} = \int_V \Psi_{i,y}\Phi_J\,dx\,dy\,dz \qquad (6.60)$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} = \int_V \left[2\eta\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \eta\left(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right)\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{iJ}^{(e)}\right]^{34} = \int_V \Psi_{i,z}\Phi_J\,dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{44} = [0]$$

y

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i\,\overline{F}_x\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \Psi_i\,\overline{T}_x\,dS_2$$

$$\left\{f_{i2}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i\,\overline{F}_y\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \Psi_i\,\overline{T}_y\,dS_2$$

$$\left\{f_{i3}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i\,\overline{F}_z\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \Psi_i\,\overline{T}_z\,dS_2$$

con

$$i = j = 1,2,....,\ r \qquad ; \qquad J = 1,2,\ldots,s$$

Nótese que el sistema de ecuaciones (6.59) no es positivo definido, ya que en la diagonal principal del mismo, aparecen elementos nulos. Esta situación hace que en la rutina de solución del sistema global de ecuaciones, se deba considerar la técnica de pivoteo. También, el hecho que la presión no aparezca como un grado de libertad en cada nodo, hace que el proceso de ensamblaje de las matrices locales de los elementos, se vuelva una tarea significativamente mas complicada que en el proceso normal de ensamblado.

6.7.2b.-Caso Axisimétrico

EL flujo axisimétrico de fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos, en régimen permanente está gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \sigma rr}{\partial r}+\frac{\partial \tau rz}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+F_r=0 \tag{6.61a}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau rz}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=0 \tag{6.61b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{6.61c}$$

El problema de valor de contorno se completa con las condiciones de contorno especificadas en las ecs.(6.50). Las ecuaciones constitutivas están dadas por las ecs.(6.47). En términos de las componentes de la velocidad, el **mrp** en este caso, vendrá dado por:

$$2\pi\int_A\left[-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial \sigma rr}{\partial r}+\frac{\partial \tau rz}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+F_r\right]W_1\, r\, dr\, dz=0 \tag{6.62a}$$

$$2\pi\int_A\left[-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau rz}{\partial r}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+F_z\right]W_2\, dr\, dz=0 \tag{6.62b}$$

$$2\pi\int_A\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]W_3 r\, dr\, dz=0 \tag{6.62c}$$

p

donde, W_1 (la variación δu), W_2 (la variación δw) y W_3 (la variación δp), son las funciones de interpolación a ser utilizadas. De igual modo que en el caso del modelo tridimensional discutido en la sección anterior, para obtener la formulación **mrp** del caso axisimétrico de las ecuaciones de movimiento, basta añadir a las ecs.(6.33), la contribución de los términos relacionados con la presión. Luego, integrando por partes los términos:

$$-2\pi\int_A p,_r\, W_1\, r\, dr\, dz=2\pi\int_A p\, r\, W_1,_r\, dr\, dz-2\pi\int_{S_2} p\, r\, W_1\, n_r\, dS_2 \tag{6.63a}$$

$$-2\pi\int_V p,z\, r\, W_2\, dr\, dz = \int_V p\, r\, W_2,z\, dr\, dz - 2\pi\int_{S_2} p\, r\, W_2\, nz\, dS_2 \qquad (6.63b)$$

Luego, sustituyendo las respectivas ecuaciones constitutivas y las relaciones tasa de deformación-velocidades en las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\int_A \left\{ \left(-p+2\eta u,r\right) r\, W_1,r + \eta\left(u,z+w,r\right) r\, W_1,z + \left(-p+2\eta\right)\frac{u}{r} W_1 \right\} = \int_A r\, W_1 \bar{F}_r\, dr\, dz + \int_{S_2} \left[\left(-p+2\eta w,r\right) nr + \eta\left(u,z+u,r\right) nz\right] r\, W_1\, dS_2 \qquad (6.64a)$$

$$\int_A \left\{ \eta\left(u,z+w,r\right) r\, W_2,r + \left(-p+2\eta w,z\right) r\, W_2,z \right\} = \int_A r\, W_2 \bar{F}_z\, dr\, dz + \int_{S_2} \eta\left(u,z+u,r\right) nr + \left[\left(-p+2\eta w,z\right) nz\right] r\, W_2\, dS_2 \qquad (6.64b)$$

$$\int_A \left\{ r\, u,r\, W_1 + u W_1 + r\, w,z\, W_1 \right\} = 0 \qquad (6.64c)$$

De acuerdo con el método de Galerkin se tendrá, a nivel de cada elemento:

$$u = \Psi_j\, u_j \qquad w = \Psi_j\, w_j \qquad j=1,2,....,r \qquad (6.65a)$$

$$p = \Phi_J\, p_J \qquad J=1,2,....,s \qquad (6.65b)$$

donde igual que en el caso anterior, r es el número de nodos por elemento y s representa en número de nodos, a nivel de cada elemento, mediante los cuales se interpola la presión, con (r > s.). Adicionalmente:

$$W_1 = W_2 = \Psi_i \qquad i=1,2,...,r \qquad (6.66a)$$

$$W_3 = \Phi_i \qquad i=1,2,...,s \qquad (6.66b)$$

Sustituyendo las ecs.(6.65) y (6.66) en las ecs (6.62a) y (6.64), se obtiene, finalmente, la formulación Galerkin/mef del modelo U-V-P, la cual viene dada por:

$$\int_A \left\{ \left[2r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + 2\frac{\eta}{r}\Psi_i\Psi_j \right] u_j + \left[r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} \right] w_j - \left[r\Psi_{i,r}\Phi_J + \Psi_i\Phi_J \right] p_J \right\} dr\, dz = \int_A r\, \bar{F}_r \Psi_i\, dr\, dz + \int_{S_2} r\, \bar{T}_r \Psi_i\, dS_2 \qquad (6.67a)$$

$$\int_A \left\{ \left[r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,z} \right] u_j + \left[2r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} \right] w_j + \left[r\Psi_{i,z}\Phi_J \right] p_J \right\} dr\, dz = \int_A r\, \bar{F}_z \Psi_i\, dr\, dz + \int_{S_2} r\, \bar{T}_z \Psi_i dS_2 \qquad (6.67b)$$

$$\int_A \left\{\left(r\Phi_i\Psi_{j,r} + \Phi_i\Psi_j\right)u_j + \left(r\Phi_i\Psi_{j,z}\right)w_{j,z}\right\}dr\,dz \tag{6.67c}$$

donde:

$$\overline{T}_r = \left(-p + 2\eta u,r\right)nr + \eta\left(u,z + u,r\right)nz \tag{6.68a}$$

$$\overline{T}_z = \eta\left(u,z + u,r\right)nr + \left(-p + 2\eta w,z\right)nz \tag{6.68b}$$

En forma matricial, el sistema de ecuaciones (6.67) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} \\ & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} \\ \text{Simétrica} & & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{u^{(e)}\right\} \\ \left\{w^{(e)}\right\} \\ \left\{p^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{f_{i1}^{(e)}\right\} \\ \left\{f_{i2}^{(e)}\right\} \\ \left\{f_{i3}^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} \tag{6.69}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = \int_A \left(2\eta\, r\, \Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \eta\, r\, \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + 2\eta\frac{1}{r}\Psi_i\Psi_j\right)dr\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \int_A \eta\, r\, \Psi_{i,z}\Psi_{j,r}\, drdz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} = \int_A \left(\eta\, r\, \Psi_{i,r}\Phi_J + \Psi_i\,\Phi_J\right)dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} = \int_V \left(2\eta\ r\, \Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \eta\, r\, \Psi_{i,r}\Psi_{j,r}\right)dr\,dz \tag{6.70}$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} = \int_A \eta\, r\, \Psi_{i,z}\Phi_J\, dr\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} = [0]$$

y

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \int_V r\,\Psi_i\,\overline{F}_r\, drdz + \int_{S_2} r\,\Psi_i\,\overline{T}_r\, dS_2$$

$$\left\{ f_{i2}^{(e)} \right\} = \int_A r\, \Psi_i\, \overline{F}_z\, dr\, dz + \int_{S_2} r\, \Psi_i\, \overline{T}_z\, dS_2$$

$$\left\{ f_{i3}^{(e)} \right\} = \{0\}$$

con

$$i = j = 1,2,....,\ r \qquad ; \qquad J = 1,2,\ldots,s$$

Puesto que $\left[k_{ij}^{(e)} \right]^{33} = [0]$, el sistema de ecuaciones anterior no es positivo definido, razón por la cual son válidos los mismos comentarios del caso tridimensional.

6.7.3.- Formulación Galerkin/(mef) de las ecuaciones de conservación: modelo penalti

Una forma de contornar las dificultades que se presentan en la implementación computacional del modelo U-V-P, es a través del llamado método penalty. El uso de la formulación penalty se ha extendido a partir del principio de la década de los ochenta. En este modelo más que considerar la ecuación de continuidad se supone que la presión está dada por una ecuación constitutiva, la cual para el caso tridimensional tiene la forma:

$$p = -\alpha(u, x + v, y + w, z) \tag{6.71}$$

y para el caso axisimétrico viene dada por:

$$p = -\alpha\left(u, r + \frac{u}{r} + w, z \right) \tag{6.72}$$

En estas ecuaciones, α es el llamado parámetro penalty el cual es un número muy grande que depende, fundamentalmente, del problema a resolver. Experiencia numéricas demuestran que:

$$\alpha = \eta \times 10^6 \leq 10^{13} \tag{6.73}$$

proporciona buenos resultados. De hecho, la solución de un problema dado por este método, en cuanto al campo de velocidades se refiere, es indistinguible, para una discretización dada, de la solución obtenida por el método u-v-p.

Una de las maneras de implementar la formulación penalty en el **mef** consiste en sustituir la ec.(6.71) o la ec.(6.72) en las ecuaciones de movimiento antes de realizar el proceso de discretización de las mismas mediante el **mef**.

6.7.3a.-Caso tridimensional

De acuerdo con lo establecido anteriormente, el método penalty, para el caso del flujo tridimensional de fluidos viscosos, incompresibles e isotérmicos, propone la sustitución de la ecuación:

$$p = -\alpha(u,x + v,y + w,z)$$

en las ecuaciones:

$$\int_V \left[(-p + 2\eta u,x)W_{2,x} + \eta(u,y + v,x)W_{2,y} + \eta(u,z + w,x)W_{2,z}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$\int_V \bar{F}_x W_2\, dx\,dy\,dz + \int_V \bar{T}_x W_2\, dS_2$$

$$\int_V \left[\eta(u,y + v,x)W_{3,x} + (-p + 2\eta v,y)W_{3,y} + \eta(v,z + w,y)W_{3,z}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$\int_V \bar{F}_y W_3\, dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \bar{T}_y W_3\, dS_2$$

$$\int_V \left[\eta(u,z + w,x)W_{4,x} + \eta(v,z + w,y)W_{4,y} + (-p + 2\eta w,z)W_{4,z}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$\int_V \bar{F}_z W_4\, dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \bar{T}_z W_4\, dS_2$$

realizando la sustitución indicada y teniendo presente las ecs.(6.56) y (6.57), el resultado final es:

$$\int_V \left[2\eta\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \eta(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}) + \alpha\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}\right]u_j + \left[\eta\,\Psi_{i,y}\,\Psi_{j,x} + \alpha\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,y}\right]v_j +$$

$$\left[\eta\,\Psi_{i,z}\,\Psi_{j,x} + \alpha\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,z}\right]w_j - \Psi_{i,x}\,\Phi_J\,p_J\Big\}dx\,dy\,dz =$$

$$\int_V \bar{F}_x \Psi_i\, dx\,dy\,dz + \int_V \bar{T}_x\,\Psi_i\, dS_2 \qquad (6.74a)$$

$$\int_V \left[\eta\,\Psi_{i,x}\,\Psi_{j,y} + \alpha\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,x}\right]u_j + \left[2\,\eta\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \eta(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}) + \alpha\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right]v_j +$$

$$\left[\eta\,\Psi_{i,z}\,\Psi_{j,y} + \alpha\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,z}\right]w_j - \Psi_{i,y}\,\Phi_J\,p_J\Big\}dx\,dy\,dz =$$

$$\int_V \bar{F}_y \Psi_i\, dx\,dy\,dz + \int_V \bar{T}_y\,\Psi_i\, dS_2 \qquad (6.74b)$$

$$\int_V \left[\eta\,\Psi_{i,x}\,\Psi_{j,z} + \alpha\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,x}\right]u_j + \left[\eta\Psi_{i,y}\,\Psi_{j,z} + \alpha\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,y}\right]v_j + \left[2\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \eta(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y}) + \right.$$

$$\left.\alpha\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} - \Psi_{i,z}\Phi_J p_J\right]w_j\Big\}dx\,dy\,dz =$$

$$\int_V \bar{F}_z \Psi_i\, dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \bar{T}_z\,\Psi_i\, dS_2 \qquad (6.74c)$$

En forma matricial este sistema de ecuaciones se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} \\ & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} \\ \text{Simétrica} & & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^{(e)}\} \\ \{v^{(e)}\} \\ \{w^{(e)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{i1}^{(e)}\} \\ \{f_{i2}^{(e)}\} \\ \{f_{i3}^{(e)}\} \end{Bmatrix} \tag{6.75}$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = \int_V \left\{\left[2\eta\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \eta\left(\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right) + \alpha\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,x}\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \int_V \left(\eta\Psi_{i,y}\Psi_{j,x} + \alpha\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,y}\right)dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{13} = \int_V \left(\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,x} + \alpha\,\Psi_{i,x}\Psi_{j,y}\right)dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} = \int_V \left[2\eta\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,y} + \eta\left(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right) + \alpha\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{23} = \int_V \left(\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,y} + \alpha\,\Psi_{i,y}\Psi_{j,z}\right)dx\,dy\,dz \tag{6.76}$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{33} = \int_V \left[2\eta\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + \eta\left(\Psi_{i,x}\Psi_{j,x} + \Psi_{i,y}\Psi_{j,y}\right) + \eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,y} + \alpha\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,z}\right]dx\,dy\,dz$$

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i\,\bar{F}_x\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \Psi_i\,\bar{T}_x\,dS_2$$

$$\left\{f_{i2}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i\,\bar{F}_y\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \Psi_i\,\bar{T}_y\,dS_2$$

$$\left\{f_{i3}^{(e)}\right\} = \int_V \Psi_i\,\bar{F}_z\,dx\,dy\,dz + \int_{S_2} \Psi_i\,\bar{T}_z\,dS_2$$

y

$$i = j = 1,2,\ldots,r$$

Nótese que la ecuación matricial anterior y por lo tanto la ecuación global del sistema, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\left[\eta k^1 + \alpha k^2\right]\{\bar{u}\} = \{f\} \tag{6.77}$$

cuando $\alpha \to \infty$, la solución tiende a:

$$\left[\alpha k^2\right]\{\bar{u}\} = \left\{\frac{f}{\alpha}\right\} \tag{6.78}$$

Se observa entonces que si la matriz $\left[k^2\right]$ en no singular, sólo es posible la solución trivial; es decir, $\{\bar{u}\} = \{0\}$. Luego, la solución del problema radica en hacer singular la matriz $\left[k^2\right]$, de modo que $\left[k^2\right]\{\bar{u}\} = \{0\}$, pero con $\{\bar{u}\} \neq \{0\}$. Nótese que ahora, aún cuando $\left[k^2\right]$ es singular, la matriz $\left[\eta k^1 + \alpha k^2\right]$ es no singular ya que $\left[k^1\right]$ es no singular.

Un modo de asegurar la singularidad de $\left[k^2\right]$ es usar la llamada integración reducida en la evaluación numérica de las integrales relacionadas con esta matriz. Más específicamente, cuando, por ejemplo, se usa el elemento isoparamétrico lineal de cuatro nodos, se debe usar la cuadratura de Gauss se 2x2 puntos de integración en la evaluación de $\left[k^1\right]$ y la cuadratura de Gauss de 1x1 puntos de integración en la evaluación de $\left[k^2\right]$.

Este método permite determinar las velocidades en cada nodo de una discretización dada. La presión, que está ausente del modelo, se determina a nivel de cada elemento, como pos-procesamiento, mediante la ec.(6.71).

6.7.3b.-Caso Axisimétrico

La formulación del modelo penalty para el caso axisimétrico sigue los mismos pasos del caso tridimensional. Así, el método propone la sustitución de la ecuación:

$$p = -\alpha\left(u,r + \frac{u}{r} + w,z\right)$$

en las ecuaciones:

$$\int_A \left\{\left(-p + 2\eta u,r\right) r\, W_2,r + \eta\left(u,z + w,r\right) r\, W_2,z + \left(-p + 2\eta\right)\frac{u}{r} W_2\right\} = \int_A r\, W_2\, \bar{F}_r\, dr\, dz + \int_{S_2} \left[\left(-p + 2\eta w,r\right) nr + \eta\left(u,z + u,r\right) nz\right] r\, W_3\, dS_2$$

$$\int_A \left\{\eta\left(u,z + w,r\right) r\, W_3,r + \left(-p + 2\eta w,z\right) r\, W_3,z\right\} = \int_A r\, W_3\, \bar{F}_z\, dr\, dz + \int_{S_2} \eta\left(u,z + u,r\right) nr + \left[\left(-p + 2\eta w,z\right) nz\right] r\, W_3\, dS_2$$

Realizando la sustitución propuesta y recordando las ecs.(6.64) y (6.65), se obtiene:

$$\int_A \left\{ \left[2r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + 2\frac{\eta}{r}\Psi_i\Psi_j + \alpha\left(r\,\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \Psi_{i,r}\Psi_j + \frac{\Psi_i\Psi_j}{r} \right) \right] u_j + \right.$$

$$\left. \left[r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} + \alpha\left(\Psi_i\Psi_{j,z} + r\,\Psi_{i,r}\Psi_{j,z}\right) \right] w_j \right\} dr\,dz =$$

$$\int_A r\,\bar{F}_r\Psi_i\,dr\,dz + \int_{S_2} r\,\bar{T}_r\Psi_i\,dS_2 \quad (6.79a)$$

$$\int_A \left\{ \left[r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,z} + \alpha\left(r\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} + \Psi_{i,z}\Psi_j\right) \right] u_j + \left[2r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \alpha\, r\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} \right] w_j \right\} dr\,dz = \int_A r\,\bar{F}_z\Psi_i\,dr\,dz + \int_{S_2} r\,\bar{T}_z\Psi_i dS_2 \quad (6.79b)$$

En forma matricial este conjunto de ecuaciones puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} \\ \text{Simétrica} & \left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{u^{(e)}\right\} \\ \left\{w^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{f_{i1}^{(e)}\right\} \\ \left\{f_{i2}^{(e)}\right\} \end{Bmatrix} \quad (6.80)$$

donde:

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{11} = \int_A \left[2r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + 2\frac{\eta}{r}\Psi_i\Psi_j + \alpha\left(r\,\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \Psi_{i,r}\Psi_j + \frac{\Psi_i\Psi_j}{r} \right) \right] dr\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{12} = \int_A \left[r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,r} + \alpha\left(\Psi_i\Psi_{j,z} + r\,\Psi_{i,r}\Psi_{j,z}\right) \right] dr\,dz$$

$$\left[k_{ij}^{(e)}\right]^{22} = \int_A \left[2r\eta\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} + r\eta\Psi_{i,r}\Psi_{j,r} + \alpha\, r\,\Psi_{i,z}\Psi_{j,z} \right] dr\,dz \quad (6.81)$$

$$\left\{f_{i1}^{(e)}\right\} = \int_V r\,\Psi_i\,\bar{F}_r\,drdz + \int_{S_2} r\,\Psi_i\,\bar{T}_r\,dS_2$$

$$\left\{f_{i2}^{(e)}\right\} = \int_A r\,\Psi_i\,\bar{F}_z\,dr\,dz + \int_{S_2} r\,\Psi_i\,\bar{T}_z\,dS_2$$

y

$$i = j = 1,2,...., r$$

6.8.- Solución de problemas de la mecánica de los fluidos mediante el método deGalerkin/mef

En esta sección se presentará la solución de algunos problemas relacionados con la mecánica de los fluidos, mediante el método de Galerkin, asociado con el método de los elementos finitos. En particular, se presentarán ejemplos del problema asociado con la entrada y

salida de fluidos viscosos en boquillas, tanto planas como circulares y, también, la solución numérica del fenómeno del hinchamiento.

6.8.1.- Fluidos Newtonianos

Una clase de problemas con solución relativamente simple, la constituye los llamados flujos unidireccionales; es decir, flujos para los cuales sólo una de las componentes de la velocidad es diferente de cero, razón por la cual también se les denomina flujos paralelos, ya que todas las partículas del fluido se mueven en una sola dirección. El flujo laminar entre placas paralelas de un fluido incompresible, es un ejemplo de esta clase de problemas para los cuales se obtienen soluciones analíticas y que, por lo tanto, sirven de comparación con las respectivas soluciones numéricas.

6.8.1a.- Ejemplo 6.1. Fluidos de Couette y Poiseuille

Una solución exacta, particularmente simple de los sistema de ecuaciones (6.59) o (6.69), se obtiene cuando se analiza el flujo plano de Couette generalizado; es decir, flujo bi-dimensional, laminar, entre placas paralelas e infinitas de un fluido incompresible y Newtoniano, con una placa fija y la otra moviéndose con una velocidad u_o (constante) en su propio plano. Adicionalmente, se considera que existe un gradiente de presión en la dirección x. Este problema queda esquematizado en la Fig.e6.1.1. Para mantener este movimiento, la diferencia de presión en la dirección x, debe equilibrarse con las fuerzas de corte. Con estas condiciones, en el caso estacionario se tendrá:

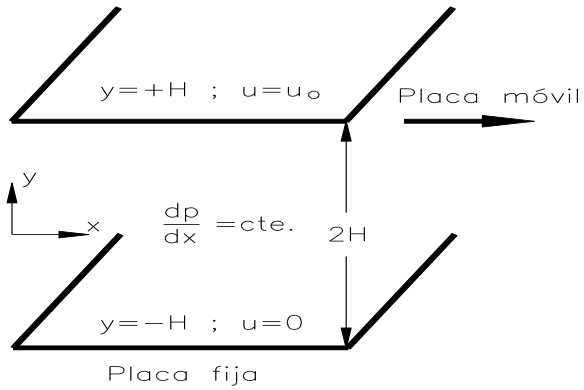


Fig.e6.1.1 Flujo plano de Couette generalizado: Geometría del dominio y condiciones de contorno.

$$u = u(x, y) \qquad v = w = 0 \qquad p = p(x, y) \tag{a}$$

Introduciendo las ecuaciones anteriores en las ecs.(6.51), éstas quedan reducidas a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{b1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{b2}$$

de donde se deduce que $u = u(y)$ y $p = p(x)$. Además, puesto que $p \neq p(y)$ y $u \neq u(x)$, se concluye que dp/dx es una constante.

De acuerdo con las ecs.(b), el sistema de ecuaciones (6.51), queda reducido a:

$$\frac{du}{dx} = 0 \tag{c1}$$

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{c2}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$u(y) = \frac{u_o}{2}\left(1 + \frac{y}{H}\right) + u_m\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) \tag{d}$$

donde:

$$u_m = -\frac{H^2}{2\mu}\frac{dp}{dx} \tag{e}$$

es la velocidad máxima del fluido.

Los llamados flujos planos de Couette y Poiseuille se derivan, como casos particulares, del flujo plano de Couette generalizado.

- **Fluido plano de Couette**

En el caso del flujo plano de Couette, $dp/dx = 0$ y las condiciones de contorno son:

$$y = \begin{cases} -H & u = 0 \\ +H & u = u_o \end{cases} \tag{f}$$

con estas condiciones de contorno, la solución del sistema de ec.(c) es:

$$u(y) = \frac{u_o}{2}\left(1 + \frac{y}{H}\right) \tag{g}$$

En la Fig.e6.1.2 se muestra una malla típica usada en la solución del problema de flujo de Couette mediante el método de Galerkin/mef para un fluido Newtoniano. La región se dividió en ocho elementos lagrangianos de nueve nodos por elemento, para un total de 45 nodos. La solución numérica de este problema se realizó con el programa computacional **ansipol** (desarrollado por el autor conjuntamente con el Dr. Agustín Torres). Este programa está basado en la formulación penalty de las ecuaciones de continuidad; es decir el sistema de ecuaciones (6.75) en su versión bi-dimensional.

En la Fig.e6.1.3 se muestra la distribución de velocidades para algunos casos considerados. En todos ellos, la solución numérica es, esencialmente, la exacta (errores del orden

de 10^{-12}). Nótese que la solución del problema del flujo plano de Couette ($dp/dx = 0$) es uno de los casos mostrados en dicha figura.

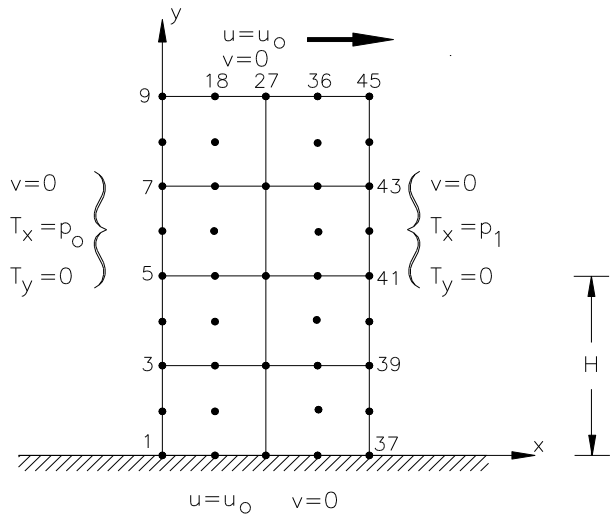


Fig.e6.1.2 Flujo plano de Couette. Discretización del dominio con elementos lagrangianos de nueve nodos.

Experimentos numéricos realizados con diferentes elementos, discretizaciones y valores del parámetro penalty mostraron lo siguiente:

a.- En cuanto al campo de las velocidades se refiere, la solución obtenida mediante el modelo penalty se mantuvo completamente estable, y encada caso, en concordancia con la solución exacta.

b.- El campo de presiones, calculado como pos-procesamiento, es muy susceptible con la discretización empleada. Las distintas experiencias numéricas realizadas, demuestran que la estabilidad de los valores de la presión requiere la utilización de un esquema de filtrado de los mismos, el cual consiste en extrapolar el cálculo de dicha variable desde los puntos de integración, a nivel de cada elemento, hacia los nodos.

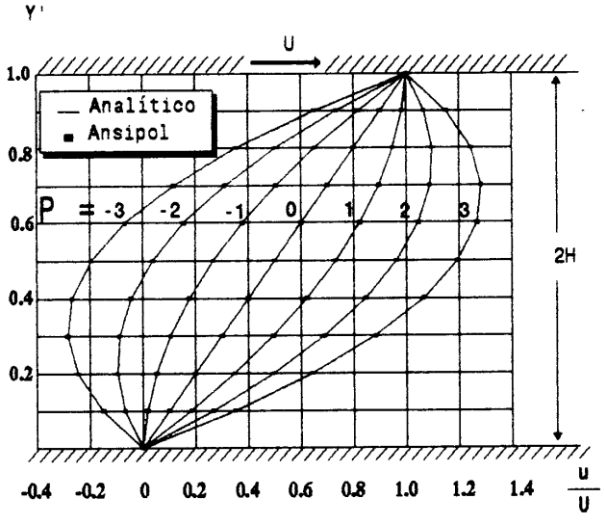


Fig.e6.1.3 Flujo de Couette entre placas paralelas. Distribución de velocidades.

- **Fluido plano de Poiseuille**

En este caso, $u_o = 0$ y $dp/dx \neq 0$ y las condiciones de contorno son:

$$y = \begin{cases} -H & u = 0 \\ +H & u = 0 \end{cases} \tag{h}$$

Este problema tiene como solución:

$$u(y) = u_m \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right) \tag{i}$$

donde u_m viene dado por la ec.(e) y ocurre en $y = 0$. En la Fig.e6.1.4 se muestra una malla típica utilizada en el cálculo de las velocidades y presiones; debido a la simetría sólo es necesario considerar la mitad del dominio.

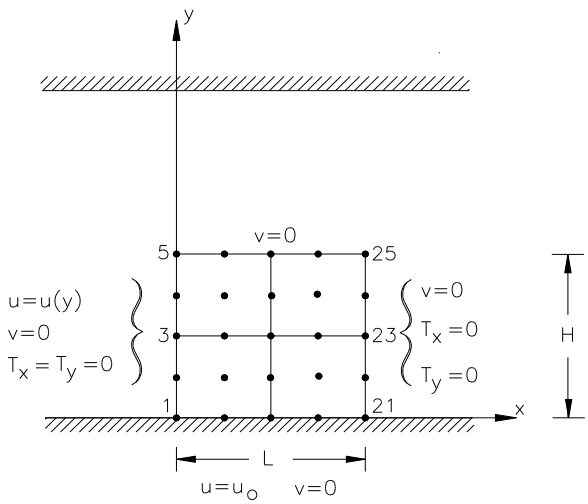


Fig.e6.1.4 Flujo plano de Poiseuille generalizado. Geometría del dominio y condiciones de contorno.

De nuevo, mediante el programa computacional **ansipol**, el lector podrá comprobar que la solución numérica es, prácticamente la exacta. La presión es lineal en la dirección horizontal y el esfuerzo cortantes τ_{xy} es lineal en la dirección vertical. Los esfuerzos normales σ_{xx} y σ_{yy} son nulos (en el orden de 10^{-2}).

6.8.1.b.-Ejemplo 6.2. Flujo deslizante entre dos placas paralelas

El flujo deslizante entre dos placas paralelas se esquematiza en la Fig.e6.2.1a y consiste en la determinación del perfil de velocidades de la superficie libre de un fluido incompresible, newtoniano e isotérmico, entre dos placas paralelas e infinitas, cuando las dos placas se mueven una hacia la otra (es decir; el fluido se desliza hacia fuera de las placas), con una velocidad u_o. Debido a la simetría biaxial de este problema, es suficiente modelar, únicamente un cuarto del cuadrante del dominio.

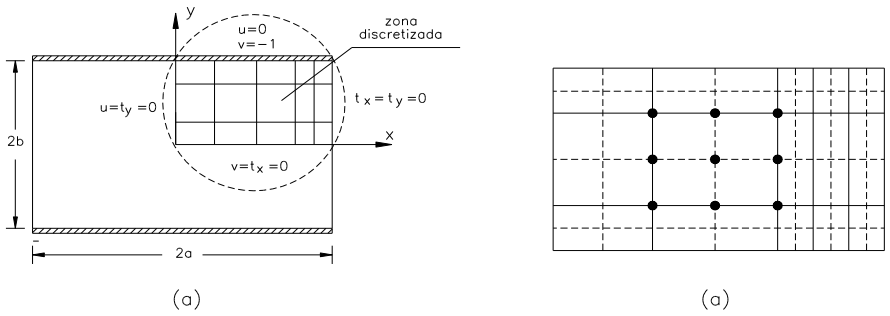


Fig.e6.2.1 Flujo deslizante entre placas paralelas. (a) Dominio a discretizar y condiciones de contorno; (b) Mallas utilizadas.

Nadai [54] obtuvo una solución aproximada (analítica) a este problema, la cual viene dada por:

$$u = \frac{3v_o x}{2b}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \quad ; \quad v = -\frac{v_o y}{2b}\left(3 - \frac{y^2}{b^2}\right) \tag{a}$$

$$p = \frac{p_o}{a^2}\left(a^2 + y^2 - x^2\right) \quad ; \quad p_o = \frac{3\mu v_o a^2}{2b^3} \tag{b}$$

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - p = \frac{p_o}{a^2}\left(x^2 - 3y^2 - a^2 + 2b^2\right) \tag{c}$$

En la Fig.e6.2.1b se muestran dos mallas utilizadas en la discretización del dominio, ambas con el mismo número de nodos pero una 5x3 elementos lagrangianos y la otra con 10x6 elementos rectangulares lineales.

En la Fig.e6.2.2 se muestra la distribución de la velocidad horizontal u como una función de y, para x = 3 y x = 6. Los resultados obtenidos por el programa computacional **ansipol** coinciden con la solución obtenida por Reddy[6] mediante los modelos U-V-P y Penalty, y a su vez concuerdan con la solución aproximada de Nadai.

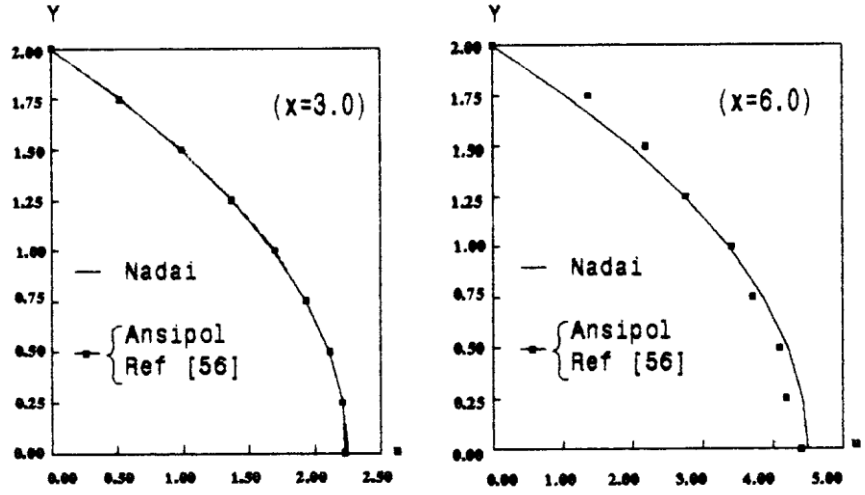


Fig. e6.2.2 Flujo deslizante entre placas paralelas. Perfil de velocidades (a) x = 3.0 ; (b) x = 6.0.

En la Tabla 6.2 se comparan la solución numérica de u(x; 0.25) obtenida mediante el programa computacional **ansipol** (mallas de la Fig.e6.2.1), y la solución analítica de Nadai.

Tabla 6.2 Flujo deslizante entre placas paralelas valores de u(x; 0.25).

Coord	Nadai	Ansipol 4 nodos	Ansipol 9 nodos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000
1.00	0.7383	0.7452	0.7383
2.00	1.4766	1.4911	1.4776
3.00	2.2148	2.2376	2.2184
4.00	2.9531	3.0074	2.9796
4.50	3.3223	3.3904	3.3600
5.00	3.6914	3.7996	3.7572
5.25	3.8760	3.9630	3.9128
5.50	4.0805	4.1242	4.0721
5.75	4.2451	4.1986	4.1487
6.00	4.4297	4.2127	4.1719

6.8.1.c.- Ejemplo 6.3. Cojinete hidrodinámico

En la Fig.e6.3.1 se muestra la representación esquemática del flujo de arrastre entre dos placas convergentes. La placa inferior se mueve con una velocidad constante u_o, y la superior está estacionaria. La distancia $h(x)$ entre las placas es muy pequeña comparada con la longitud de la placa inferior. Este problema también es conocido con el nombre de cojinete hidrodinámico.

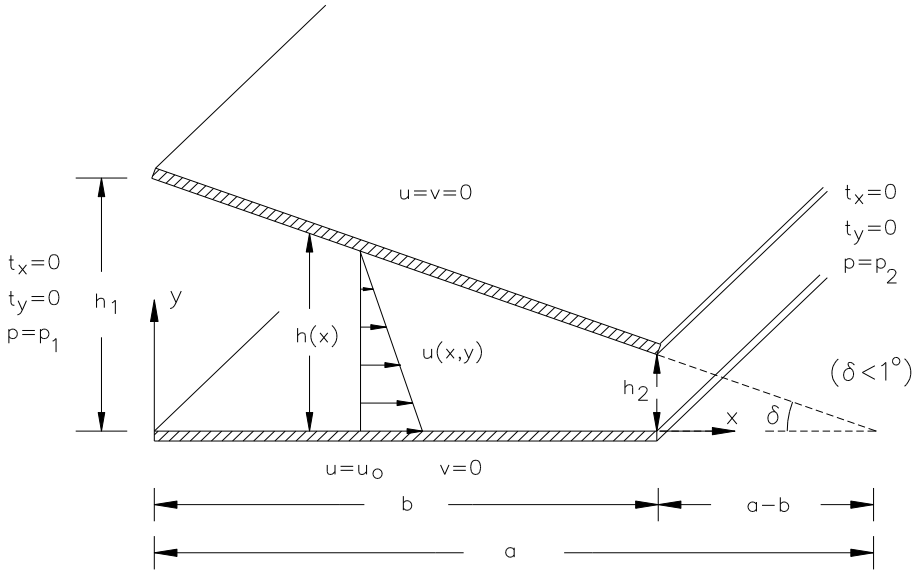


Fig.e6.3.1 Flujo de arrastre entre dos placas convergentes: Representación esquemática y condiciones de contorno.

La ecuación que gobierna este problema para un fluido newtoniano es[1]:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \qquad \text{(a1)}$$

y las condiciones de contorno son:

$$\text{en } y = 0 \quad ; \quad u = u_o \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad p = p_o \qquad \text{(a2)}$$

$$\text{en } y = h \quad ; \quad u = 0 \quad ; \quad x = b \quad ; \quad p = p_1 \qquad \text{(a3)}$$

La solución analítica del problema de valor de contorno dado por las ecuaciones anteriores es:

$$u(x, y) = \frac{h(x) - y}{h(x)} \left[u_o - \frac{1}{2\mu} \frac{dp(x)}{dx} y\, h(x) \right] \qquad \text{(b1}$$

$$p(x) = p_o + 6\mu u_o \frac{x(b - x)}{h^2(x)(2a - b)} \qquad \text{(b2}$$

En la Fig.e6.3.2 se muestra la malla utilizada en la solución numérica de este problema, la cual consiste en 64 elementos rectangulares lineales, con un total de 75 nodos. Las características geométricas del dominio son:

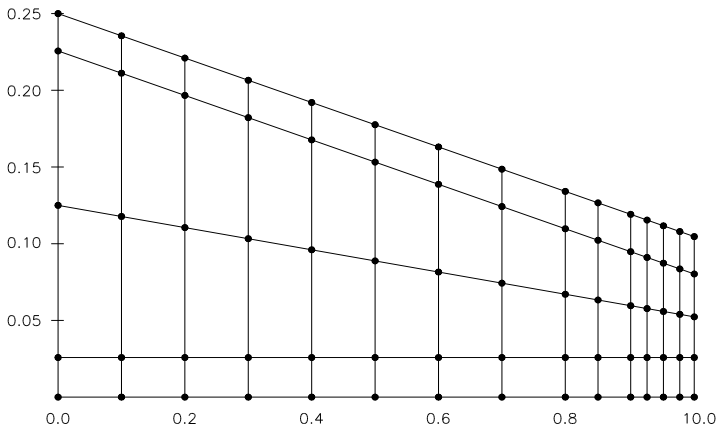


Fig.e6.3.2 Cojinete hidrodinámico. Discretización del dominio.

$$x = 0 \quad ; \quad h_o = 0.025 \text{ cms.} \quad ; \quad p_o = 0$$

$$x = b \quad ; \quad h_1 = 0.0125 \text{ cms.} \quad ; \quad p_1 = 0$$

$$y = l \quad ; \quad u(x,0) = u_o = 15 \text{ cms./sg.}$$

$$y = h(x) \quad ; \quad u(x, h) = 0$$

En la Fig.e6.3.3 se aprecia el perfil de velocidades para un fluido newtoniano con $\mu = 200$ Pa.sg. Cerca de la entrada del canal los perfiles tienen la característica del flujo de dragado, pero cerca de la salida se asemejan más a un fluido del tipo Poiseuille.

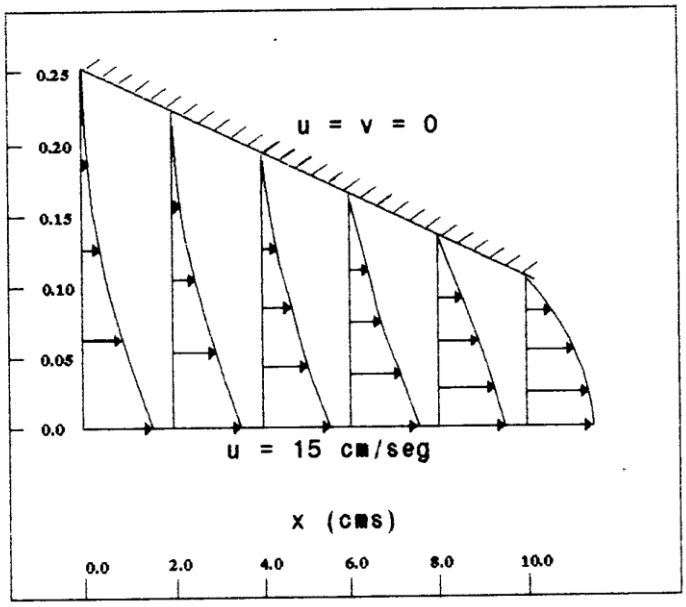


Fig. 6.3.3 Cojinete hidrodinámico. Perfil de velocidades para un fluido Newtoniano con $\mu = 200$ Pa.sg.

La razón de la transición del fluido se debe al aumento de la presión en el canal, tal como se puede observar en la Fig.e6.3.4.

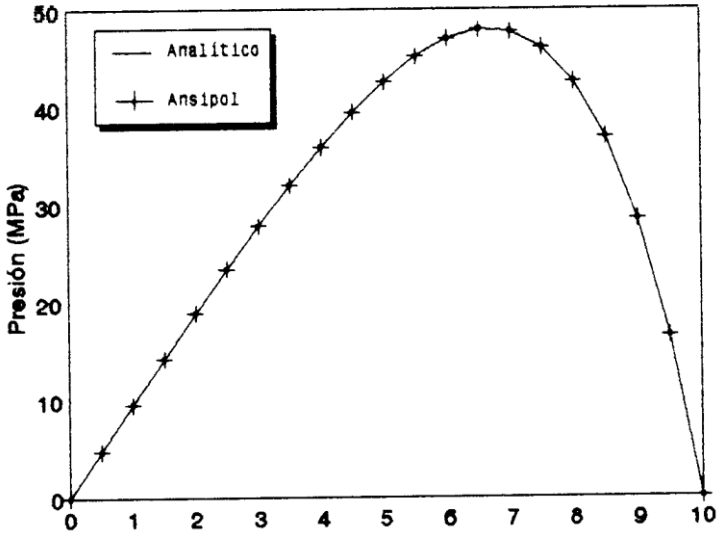


Fig. e6.3.4 Cojinete hidrodinámico. Distribución de presiones para un fluido Newtoniano con $\mu = 200$ Pa.sg.

En la Tabla 6.3 se comparan los resultados obtenidos a través de **ansipol** (para la malla de la Fig. e6.3.2), con la solución analítica. Como puede apreciarse, a pesar que la malla no es muy

refinada, los resultados de la presión dados por el programa computacional **ansipol** se comparan satisfactoriamente con la solución analítica.

Tabla 6.3 Cojinete hidrodinámico. Comparación de resultados.					
x (cms)	y (cms)	u (analítico)	u (ansipol)	p (analítico)	p (ansipol)
0.0	0.00125	3.750	3.750	0.00	0.00
2.0	0.01125	4.584	4.583	18.96	18.99
4.0	0.01000	5.625	5.625	36.00	36.11
6.0	0.00875	6.964	6.964	47.02	47.32
8.0	0.00750	8.750	8.750	42.66	43.08
10.0	0.00625	11.250	11.250	0.00	0.00

6.8.1.d.- Ejemplo 6.4. Contracción plana suave: Relación 4:1

La Fig.e6.4.1 representa el sistema físico y condiciones de contorno de una entrada de flujo suave en una boquilla plana, con una relación de contracción de 4:1. Debido a la simetría únicamente es necesario discretizar la mitad del dominio.

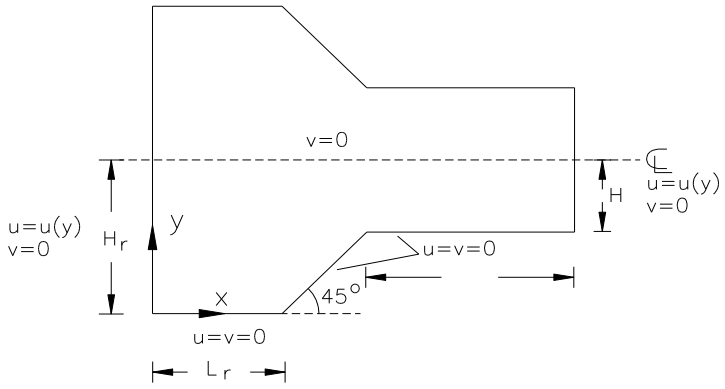


Fig.e6.4.1 Contracción plana suave: relación (4:1). Dominio y condiciones de contorno.

En la Fig.e6.4.2 se muestra la discretización de la mitad inferior de la región, la cual consta de 64 elementos lagrangianos, con un total de 297 nodos.

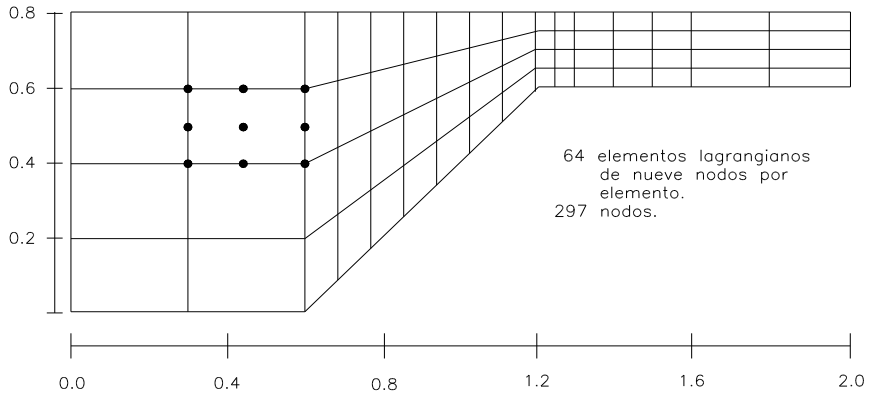


Fig.e6.4.2 Contracción plana suave (4:1). Discretización del dominio.

En la Fig.e6.4.3 se observa el campo de velocidades de un fluido newtoniano con $\mu=10^3$ Pa.sg. y una velocidad máxima de salida de $u_{max}=20$cms./sg. El campo del flujo no muestra ningún tipo de irregularidades y el perfil parabólico de Poiseuille se recupera en $L_e=H/2$.

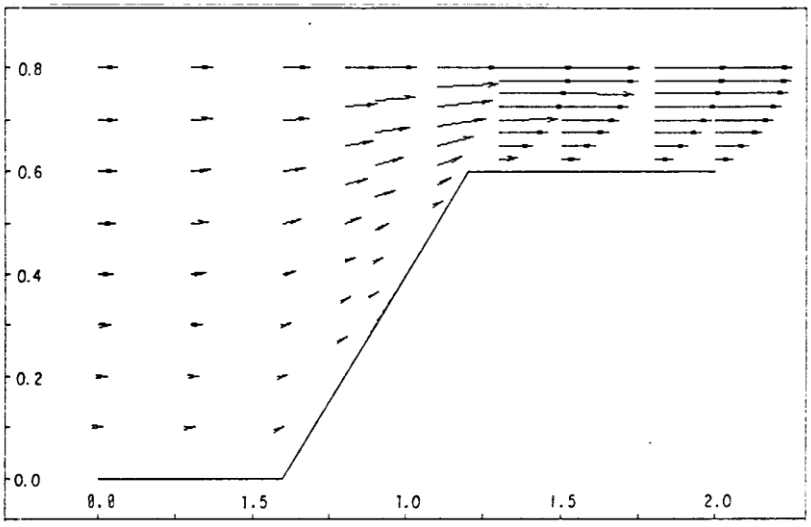


Fig.e6.4.3 Contracción plana suave 4:1). Campo de flujo de un fluido Newtoniano ($\mu=10^3$ Pa.sg).

En la Fig.e6.4.4 se muestra la velocidad sobre la línea de simetría y en la Fig.e6.4.5, la presión sobre la misma línea. Nótese la concordancia de los resultados entre el programa computacional **ansipol** y la referencia [12].

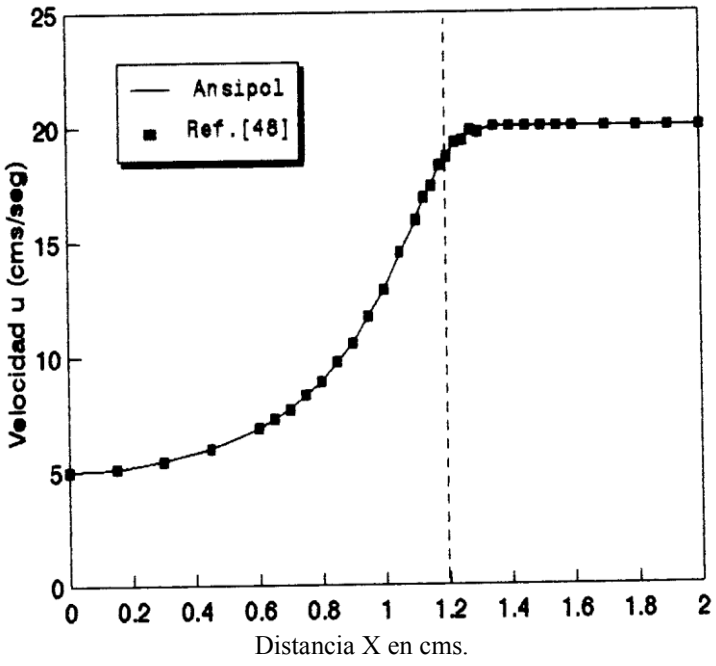


Fig.e6.4..4 Contracción plana suave (4:1). Velocidad sobre la línea de simetría de un fluido Newtoniano ($\mu=10^3$ Pa.sg).

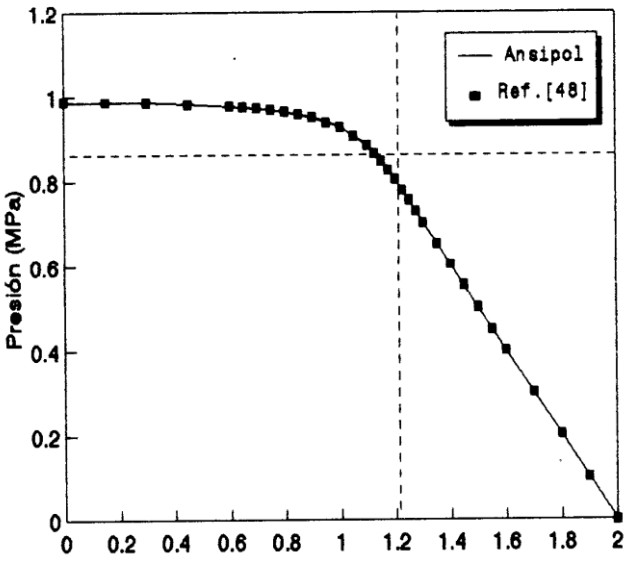


Fig.e6.4.5 Contracción plana suave (4:1). Presión sobre la línea de simetría de un fluido Newtoniano ($\mu=10^3$ Pa.sg).

6.8.1.e.- Ejemplo 6.5. Contracción plana abrupta: Relación 10:1

En la Fig.e6.5.1 se muestra el dominio y las condiciones de contorno de una entrada de flujo abrupta en una boquilla plana, con una relación de contracción de 10:1. De nuevo, por simetría, sólo es necesario discretizar la mitad del dominio. Se supone que a la entrada del reservorio, el perfil de velocidades está completamente desarrollado con una velocidad máxima de 0.5 cm/sg. La viscosidad newtoniana es $\mu=10^3$ Pa.sg. y, el índice de ley de potencias es n=1.0.

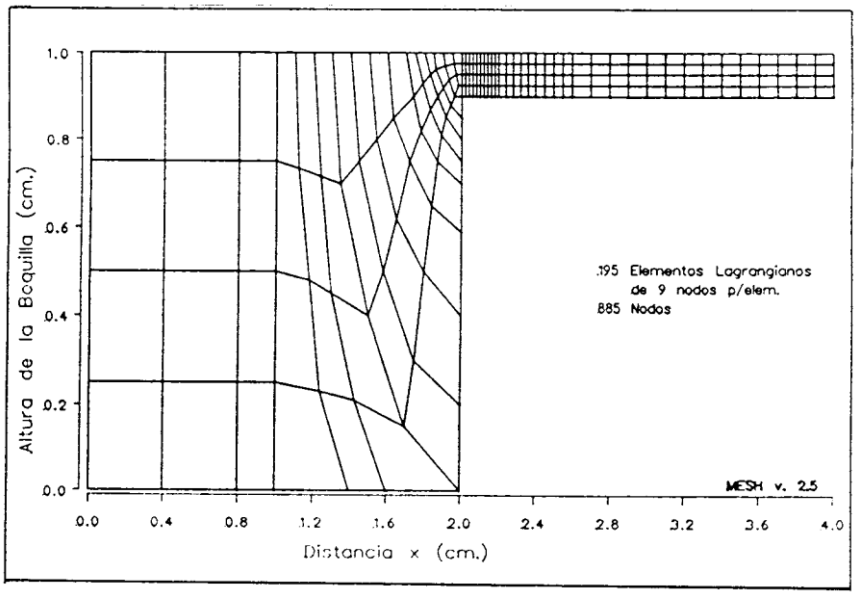


Fig.e6.5.1 Contracción plana abrupta (10:1). Discretización del dominio de la mitad inferior de la boquilla.

En la Tabla 6.4 se comparan las velocidades, sobre la línea de simetría, entre las soluciones obtenidas mediante el programa computacional **ansipol** y una solución obtenida a través del modelo u-v-p de elementos finitos. Como puede apreciarse, ambas soluciones coinciden.

Tabla 6.4 Comparación de las velocidades sobre la línea de simetría de un fluido newto-niano($\mu = 10^3$ Pa.sg y n=1.0; $u_{max} = 5.0\,cm/sg$) en una contracción abrupta (10:1).

u\x	0.00	0.40	0.80	1.20	1.40	1.60	1.80	2.20	2.60	3.00	3.50	4.0
ANSIPOL	0.500	0.504	0.525	0.582	0.751	1.039	1.840	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
Ref[42]	0.500	0.504	0.526	0.582	0.757	1.048	1.869	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00

En la Fig.e6.5.2 se muestra el campo de flujo a través de la contracción. Puede observarse que el campo del flujo no presenta irregularidades. En el área cercana a la esquina inferior del reservorio, el flujo es muy débil siendo esta una zona de estancamiento del fluido y puede notarse la existencia de un pequeño vórtice.

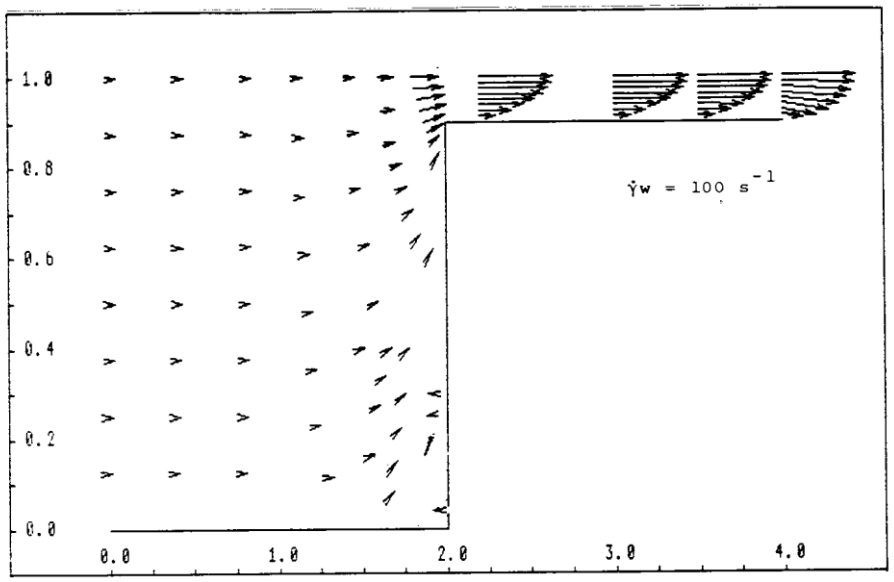


Fig.e6.5.2 Campo de velocidades a través de una contracción plana (10:1) de un fluido newtoniano ($\mu = 10^3$ Pa.sg y n=1.0; $u_{max} = 5.0\,cm/sg$).

6.8.2.- Fluidos no-Newtonianos

En el programa computacional **ansipol**, la solución numérica de los problemas no lineales derivados del flujo de fluidos no-Newtonianos, se obtiene mediante el método de las aproximaciones sucesivas de Picard. Partiendo del caso newtoniano (n=1.0), se da inicio al esquema iterativo hasta que se alcanza la convergencia de dicho esquema, la cual está basada en la norma del error dada por:

$$\|e\| = \left\| \frac{x^n - x^{n-1}}{x^{n-1}} \right\| \tag{6.82}$$

donde x^n es el vector de las incógnitas en la e-nésima iteración. El número de iteraciones depende tanto de la malla como del valor de n[19].

6.8.2a.- Ejemplo 6.6. . Contracción plana abrupta: Relación 10:1

Como un ejemplo representativo de un fluido no-newtoniano, tipo ley de potencias, se analizará la misma contracción mostrada en la Fig.e6.5.1. Se supondrá ahora que el fluido tiene una viscosidad $\eta = 9.5x10^3$ Pa.sg. y un índice de potencias n=0.38. Se supone además que el fluido está completamente desarrollado a la entrada del reservorio y que la velocidad máxima es $u_{max} = 5.0\,cm/sg$.

En la Tabla 6.5 se comparan de nuevo, las velocidades, sobre la línea de simetría, entre la soluciones obtenidas mediante el programa computacional **ansipol** y una solución obtenida a través del modelo u-v-p de elementos finitos. Nótese que también en este caso, ambas soluciones coinciden.

Tabla 6.5 Comparación de las velocidades sobre la línea de simetría de un fluido no-newtoniano(η=$5x10^3$ Pa.sg y n=0.38; $u_{max} = 5.0\,cm/sg$) en una contracción abrupta.

u\x	0.00	0.40	0.80	1.20	1.40	1.60	1.80	2.20	2.60	3.00	3.50	4.0
ANSIPOL	0.500	0.515	0.547	0.605	0.768	1.073	2.000	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
Ref[42]	0.500	0.515	0.549	0.607	0.777	1.084	2.030	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00

El campo de flujo a través de la contracción se muestra en la Fig.e6.6.1. Partiendo de la solución newtoniana, la convergencia del campo de las iteraciones se alcanzó con cuatro iteraciones.

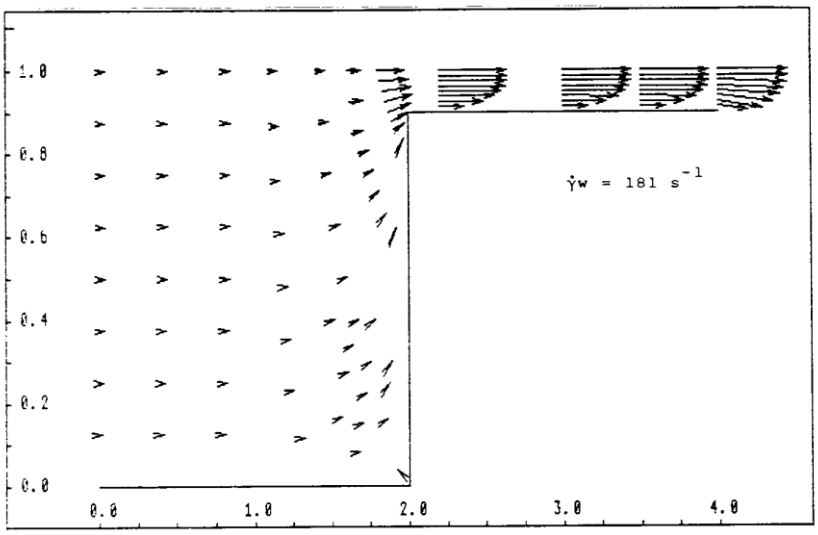


Fig.e6.6.1 Campo de velocidades a través de una contracción plana (10:1) de un fluido tipo ley de potencias ($\eta = 9.5x10^3$ Pa.sg; n=0.38).

En la Fig.e6.6.2 se comparan las velocidades, sobre la línea de simetría entre la solución newtoniana de la boquilla en estudio con la solución no-newtoniana.

En la Fig.e6.6.3 se comparan las presiones sobre la línea de simetría entre la solución newtoniana de la boquilla en estudio con la solución no-newtoniana.

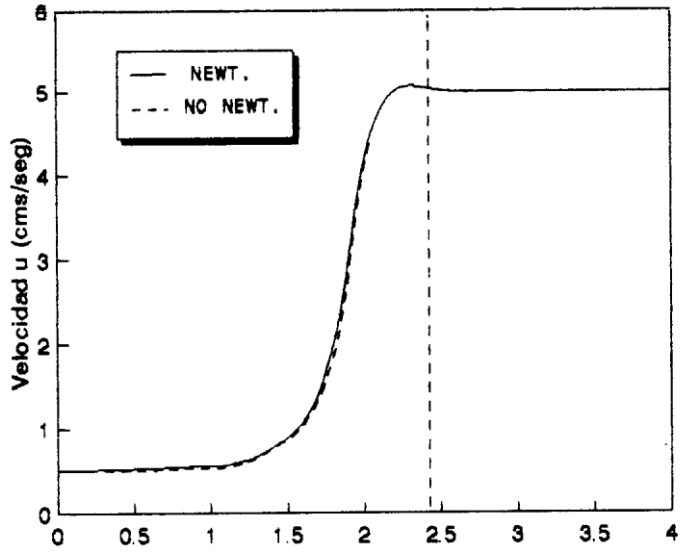


Fig.e6.6.2 Contracción plana abrupta(10:1). Comparación de las velocidades sobre la línea de simetría de un fluido newtoniano (μ=10^3 Pa.sg; n=1.0) y un fluido tipo ley de potencias ($\eta = 9.5x10^3$ Pa.sg; n=0.38).

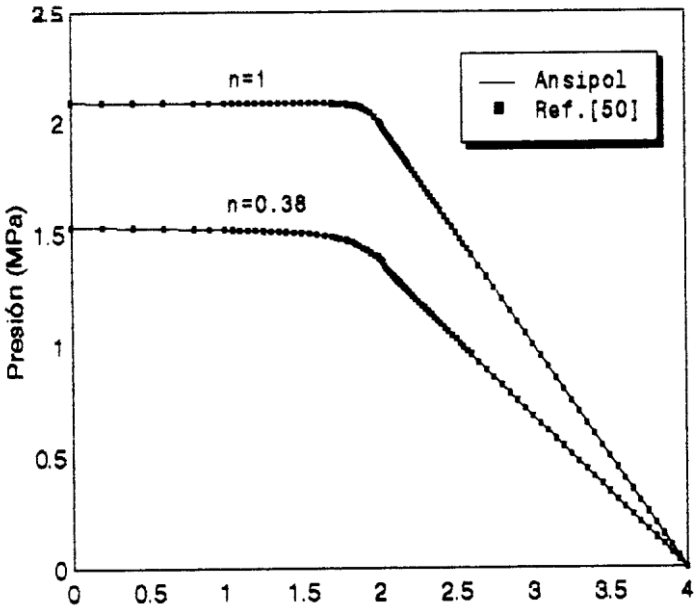


Fig.e6.6.3 Contracción plana abrupta(10:1). Comparación de las presiones sobre la línea de simetría de un fluido newtoniano (μ=10^3 Pa.sg; n=1.0) y un fluido tipo ley de poten-cias ($\eta = 9.5x10^3$ Pa.sg; n=0.38).

Es importante destacar que en todas las situaciones, las soluciones numéricas obtenidas mediante el programa computacional **ansipol** concuerdan perfectamente tanto con las soluciones analíticas como con las soluciones aproximadas obtenidas por otros autores y diferentes modelos de aproximación.

6.8.3.- Hinchamiento de fluidos viscosos

El término “hinchamiento” es usado para describir el incremento del diámetro del flujo de un fluido, cuando éste emerge desde un orificio , ducto o boquilla. Muchos autores atribuyen su descubrimiento a Barus[5] en 1893, razón por la cual también se le conoce con el nombre de efecto de Barus. Este fenómeno ocurre tanto para fluidos newtonianos como para no-newtonianos, pero es mucho mas importante para los fluidos viscoelásticos, los cuales exhiben, muchas veces, un incremento en su diámetro de hasta un 400%.

Para bajos números de Reynolds ($R_e < 16$), el hinchamiento de un fluido newtoniano que emerge desde una boquilla circular, está alrededor del 13%. Esto se debe al ajuste de las líneas de corriente cuando el fluido emerge desde la abertura a la atmósfera y adquiere una superficie libre. Evidencias experimentales[72] demuestran que para ($R_e > 16$), el fluido emergente exhibe un 13% de contracción en su diámetro (diámetro del extruido entre el diámetro de la boquilla; d/D). Entonces, para un fluido newtoniano, la relación entre el radio de una boquilla circular y la altura del chorro emergente desde la misma, varía entre 1.13 y 0.87.

6.8.3a- Mecanismo del fenómeno del hinchamiento

En la Fig.6.3 se muestra la secuencia de deformación de un fluido imaginario desde la entrada de la boquilla, hasta que emerge de la misma. En la boquilla, el elemento de fluido es estirado y luego, consecutivamente contraído e hinchado cuando emerge a la atmósfera.

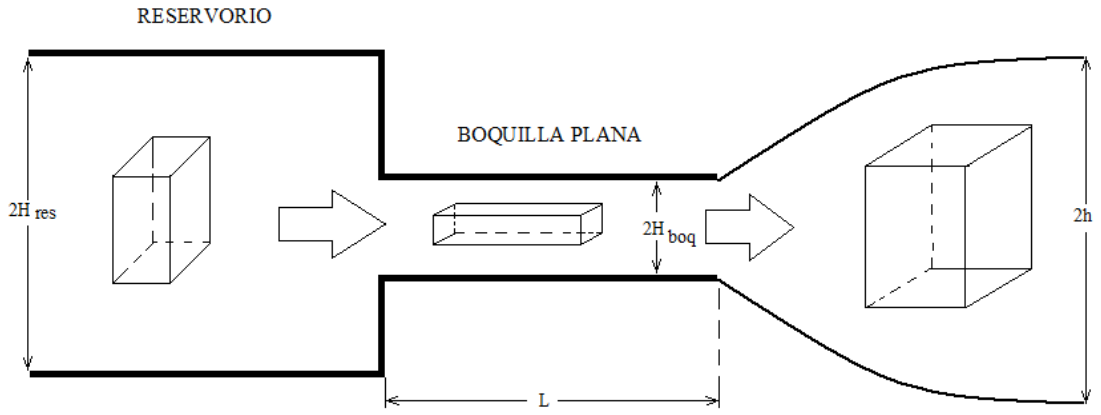


Fig.6.3 Representación esquemática de la secuencia de deformación de un elemento de fluido a través de una boquilla plana.

Entre otros factores, el grado de hinchamiento B=h/H (o B=d/D para una boquilla circular), depende de la relación entre la longitud de la boquilla y la altura de la misma; es decir L/D , (o la relación entre la longitud de la boquilla y el diámetro de la misma; es decir, L/D). Para boquillas cortas, el tiempo de residencia es más corto que la memoria del fluido y, por lo tanto, hay una tendencia de éste a retener la forma que tenía en el reservorio. Para boquillas suficientemente largas, la memoria del fluido desaparece completamente y se alcanza una relación asintótica del hinchamiento que puede ser considerablemente menor que en el caso de boquillas cortas. En la Fig.6.4 se muestran los elementos básicos y condiciones de contorno del fenómeno del hinchamiento.

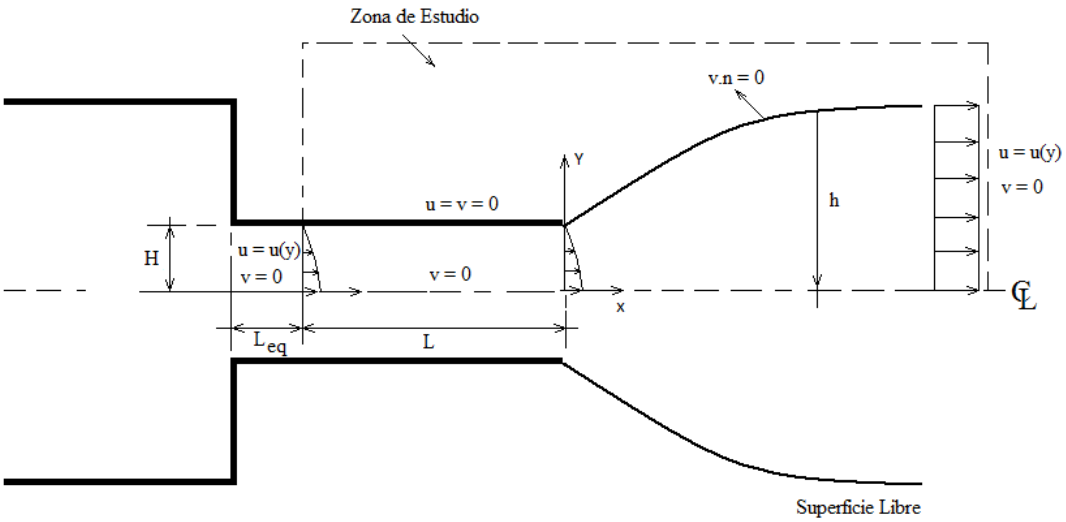


Fig. 6.4 Elementos básicos del problema del hinchamiento y condiciones de contorno asociadas.

6.8.3b- Cálculo de la superficie libre

Analíticamente, el modelaje del hinchamiento presenta tremendas dificultades puesto que no sólo se desconocen las características del fluido (velocidad, presión, etc.), si no también la localización de la superficie libre. La solución de este problema (para fluidos newtonianos, en ausencia de tensión superficial), vía elementos finitos, fue considerada por primera vez, por Nickell et.al [55]. Su algoritmo, el cual ha sido ampliamente usado, envuelve un procedimiento iterativo para la determinación de la superficie libre, mediante la construcción de una línea de corriente, usando el campo de velocidades calculado en la iteración anterior. Imponiendo las condiciones naturales de contorno, se determina el campo de velocidades asociado a la superficie libre, inicialmente supuesta. En general, el vector de velocidad no será tangente a esta superficie; es decir, no se verifica que:

$$\mathbf{v}.\bar{\mathbf{n}} = 0 \tag{6.83}$$

En forma matricial esta ecuación puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = 0 \tag{6.84}$$

Luego:

$$u\,n_x + v\,n_y = 0 \tag{6.85}$$

Observando la Fig.6.5, se puede notar que:

$$n_x = \frac{dy}{ds} \tag{6.86a}$$

$$n_x = -\frac{dx}{ds} \tag{6.86b}$$

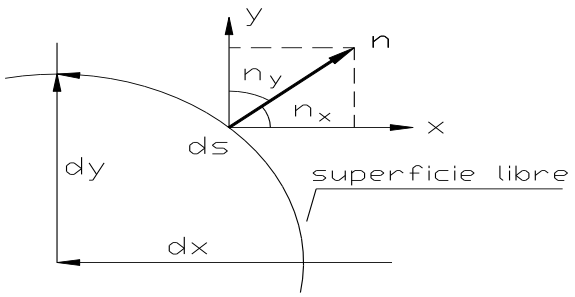


Fig.6.5 Cosenos directores para el cálculo de la superficie libre.

Sustituyendo las ecs.(6.86) en la ec.(6.85) se obtiene:

$$u\frac{dy}{ds}-v\frac{dx}{ds}=0 \tag{6.87}$$

y por lo tanto:

$$\frac{dy}{ds}=\frac{v}{u}\frac{dx}{dy} \tag{6.88}$$

y, finalmente:

$$y=\int_0^L \frac{v}{u}dx \tag{6.89}$$

donde L es la longitud en la dirección x. La ecuación anterior puede ser integrada mediante la regla de Simpson y así, la nueva superficie libre viene entonces dada por:

$$h(x)=h_o+\int_0^L\left(\frac{u}{v}\right)dx \tag{6.90}$$

donde h_o representa la localización inicial, supuesta, de la superficie libre (generalmente una extensión del contorno sólido, tal como se muestra en la Fig.6.5).

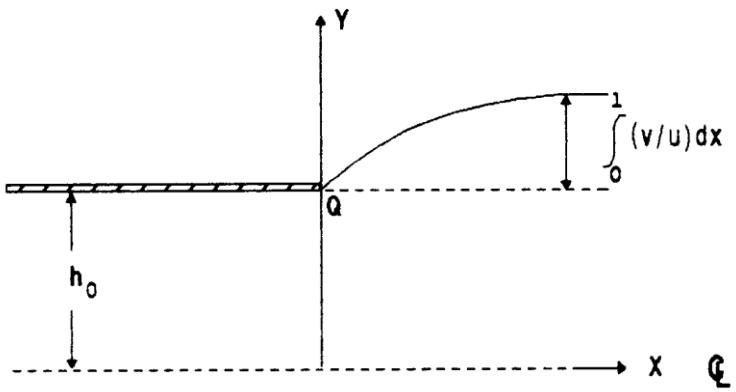


Fig.6.5 Esquema de cálculo de la superficie libre mediante el algoritmo de Nickell.

La solución comienza con el proceso iterativo (método de Picard), en el dominio inicialmente supuesto y continúa hasta que se alcanza el criterio establecido para la norma del error en el hinchamiento. Con el campo de velocidades así calculado, se determina, de acuerdo con la ec.(6.90), la nueva localización de la superficie libre. En este nuevo dominio se vuelve a iterar para determinar el nuevo campo de velocidades, y el proceso se repite hasta que la norma del error establecido para el cálculo de la superficie libre, se satisface. El número de iteraciones sobre el campo del flujo y sobre la superficie libre depende del índice de ley de potencias y también, por supuesto, de la superficie libre inicialmente asumida.

6.8.3.c- Ejemplo 6.7. Hinchamiento de fluidos newtonianos a través de boquillas planas

El tamaño y las dimensiones del dominio que se han utilizado en los siguientes ejemplos, están asociados con la boquilla plana con una relación de L/H=16/1. La discretización del dominio del problema, para todos los casos, se muestra en la Fig.e6.7.1.

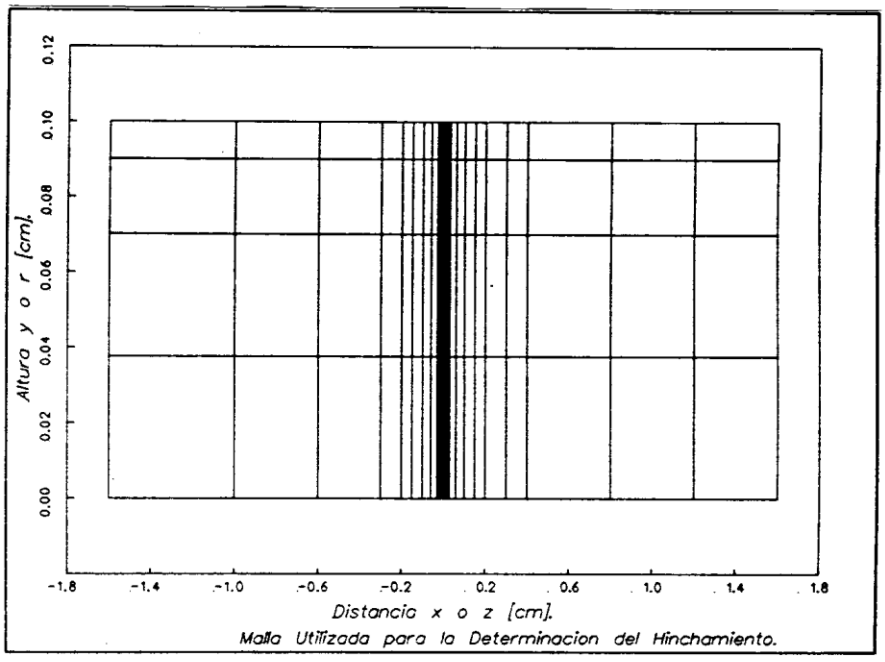


Fig.e6.7.1 Malla de elementos utilizada en la solución de los problemas de hinchamiento; 92 elementos lagrangianos de nueve nodos y 423 nodos.

Partiendo de la extensión del contorno sólido (L/H=1.0), como una primera aproximación a la localización de la superficie libre, la solución del problema newtoniano ($\mu=10^3$ Pa.sg. y n=1.0), mediante el programa computacional **ansipol**, requirió cinco iteraciones: L/H = 2.089, 1.901, 1.962, 1.940 y 1.949, hasta que el algoritmo de Nickell convirgió con un error máximo de 1% entre iteraciones.

La relación final de hinchamiento de 19.49%, también ha sido encontrada por otros autores con distintas mallas, elementos, modelo de elementos finitos y método de solución.[19],[51],[54] En la Fig.e6.7.2 se muestra la configuración final de la malla de elementos finitos después de haberse obtenido la convergencia del esquema iterativo.

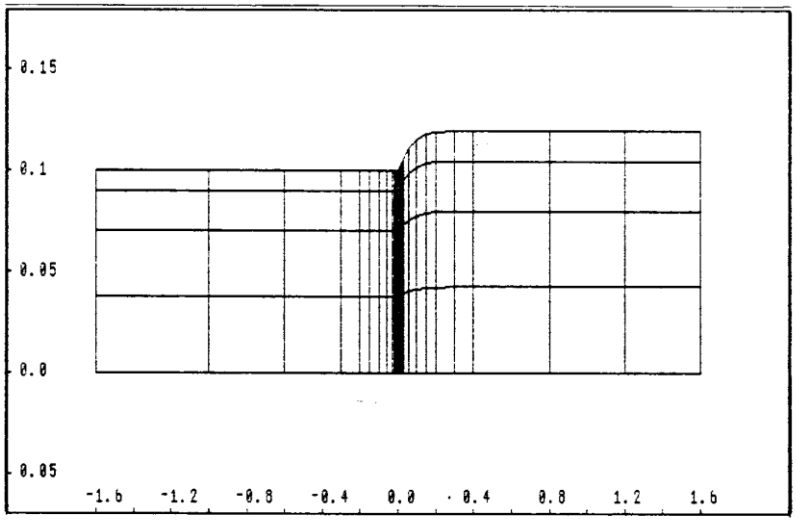


Fig.e6.7.2 Configuración final de la malla de elementos finitos: Hinchamiento newtoniano ($\mu = 10^3$ Pa.sg y n=1.0).

En la Fig.e6.7.3 se muestra una ampliación de la malla deformada de la figura anterior, en la vecindad de la salida de la boquilla.

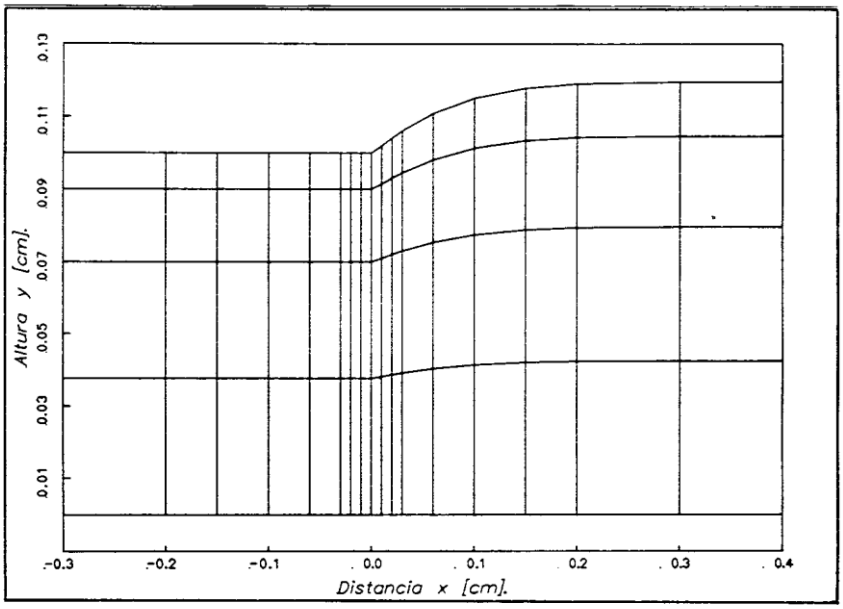


Fig.e6.7.3 Detalle de la malla deformada en la vecindad de la salida de la boquilla.

Finalmente, en la Fig.e6.7.4 se puede observar el campo de flujo en la región cercana a la salida de la boquilla. Nótese que el fluido newtoniano adquiere un perfil plano en una distancia

muy corta, lo cual era de esperarse ya que en este tipo de fluido no existen efectos de memoria, los cuales son característicos de los fluidos viscoelásticos.

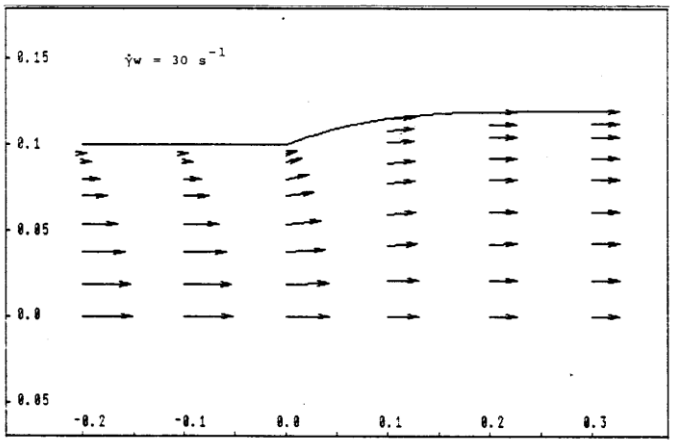


Fig.e6.7.4 Campo de velocidades en el hinchamiento de un fluido newtoniano (en la vecindad de la salida de la boquilla).

6.8.3.d- Ejemplo 6.8. Hinchamiento de fluidos no-newtonianos a través de boquillas planas

Con la misma malla de la Fig.e6.7.1, se considera a continuación, la solución del fenómeno del hinchamiento para fluidos no-newtonianos tipo ley de potencias con un índice de consistencia de $m = 10^4$ Pa.s., y diferentes índices de ley de potencias. Debido a la naturaleza no-lineal de este tipo de fluidos, para poder determinar la configuración final de la superficie libre, se deben realizar iteraciones sobre el campo de flujo para un dominio fijo y sobre la superficie libre del dominio.

En la Fig.e6.8.1 se compara la forma final de la superficie libre para un fluido newtoniano (n=1.0), y para fluidos tipo ley de potencia (n=0.38, 0.50, 0.80). Debe notarse que para n=0.38 y 0.50 aparece una pequeña contracción inmediatamente después de la salida de la boquilla. No se tiene claro si esta contracción representa el comportamiento real del fluido con un bajo valor del índice de ley de potencias o, simplemente, se debe a un efecto de tipo numérico. Idénticos resultados han sido reportados por otros autores. [20],[51]

6.8.3.e- Ejemplo 6.9. Hinchamiento a través de boquillas circulares

La misma malla de la Fig.6.7.1 y las mismas consideraciones descritas en la sección anterior, pero ahora suponiendo que la geometría posee características inherentes a un problema axisimétrico, se utilizaron para modelar el fenómeno del hinchamiento de fluidos newtonianos y no-newtonianos tipo ley de potencias, desde boquillas circulares.

- **Fluidos newtonianos**

Del mismo modo que en el caso de boquillas planas, partiendo de la extensión del contorno sólido (d/D = 1.0), como una primera aproximación a la localización de la superficie libre, la solución al problema newtoniano ($\mu=10^3$ Pa.sg. y n=1.0), requirió cinco iteraciones (d/D = 1.491, 1.293, 1.348, 1.330, 1.337), hasta que el algoritmo de Nickell convergió con un error máximo de 1% entre iteraciones. La relación final del hinchamiento de 13.37%, concuerda con la

evidencia experimental [39], así como también con los resultados numéricos obtenidos por otros autores. [19],[70]

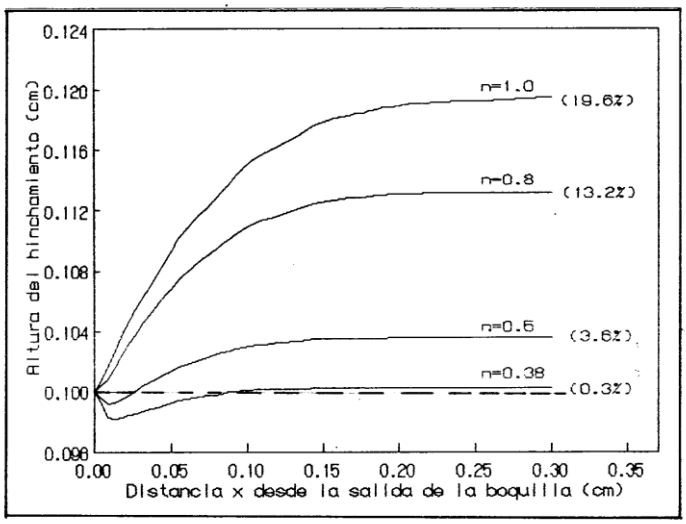


Fig.e6.8.1 Formas de las superficies libres para fluidos newtonianos y no-newtonianos tipo ley de potencias.

- **Fluidos no-newtonianos**

A continuación se presentan los resultados del hinchamiento de los mismos tipos de fluidos no-newtonianos analizados anteriormente, pero considerando ahora que la boquilla es circular. De nuevo, la malla inicial es la misma mostrada en la Fig.e6.7.1. En todos los casos, los resultados concuerdan tanto con la evidencia experimental como con las soluciones numéricas obtenidos por otros autores. En la Fig.e6.9.1 Se muestran los resultados para n=1.0 y n=0.5. Adicionalmente estos resultados se comparan, en la misma figura con las respectivas soluciones relacionadas con el hinchamiento plano.

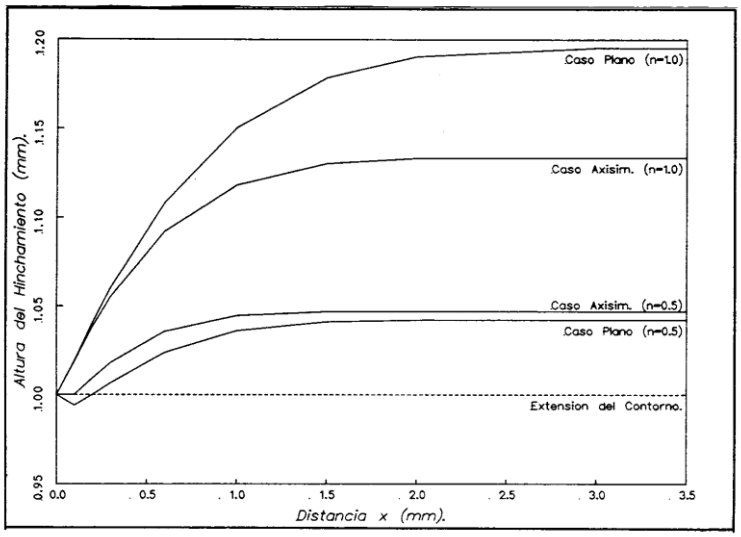


Fig.e6.9.1 Formas de las superficies libres para fluidos newtoniano y no-newtonianos en boquillas planas y circulares.

BIBLIOGRAFÍA.

En las últimas décadas han aparecido innumerables y excelentes libros sobre el método de los elementos finitos, e infinidad de artículos sobre una enorme cantidad de aplicaciones del método, en las diversas áreas de la ciencia. A continuación se presenta una lista tanto de libros como de artículos que complementan el material de estudio de este texto. Varios de ellos han sido usados en esta obra sin ser citados explícitamente.

1.- Allan W., "Newtonian Die Swell Evaluation for Axisymetric Tube Exits Using a Finite Element Meted", Int. J. for Num. Meth. in Eng. Vol II, 1621-1632 (1977).

2.- Baliga, B. R., "A Control – Volume Finite Element Method for Covective Heat and Mass Transfer", Ph. D., University of Minnesota, 1979.

3.-. Bathe K., "Finite Element Procedures". Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. Y. 1996.

4.- Barrett, J. W., Morton, K. W., "Optimal Finite Element Method Solutions to Diffusion – Convection Problems in One Dimension", Int. Num. Meth. in Eng. Vol. 15, 1474 (1980).

5.- Barus, C., Am. J. Sci. 45,87 (1983).

6.- Bird, R. B., Curtis, Ch. F., Armostrong, R. C., Hassger, O., "Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1, Fluid Mechanics", John Wiley & Sons, 1987.

7.- Bird, R. B., Curtis, Ch. F., Armostrong, R. C., Hassger, O., "Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 2, Kinetic Theory", John Wiley & Sons, 1987.

8.- Boger, D. V., Hur, D, U., Binnington, R, J., "Further Observations of Elastic Effects in Tubular Entry Flows", J. of Non – Newt. Fluid Mech., 20 (1986) 31 – 49.

9.- Bravo, V., Rincón, A., Da Fonseca, Z., "Programa para graficar con Líneas Ocultas", Reporte Interno, INDESCA, 1991.

10.- Brooks, A., Hughes, T. J. R., "Streamline – Upwind / Petrov – Galerkin Methods for Advection – Dominated Flows, 3 ra Int. Conf. Finite Element. Methods in Flows Problems, Proceedings, Bannf, Alberta, Canada (1980).

11.- Brooks, A., "Petrov – Galerkin Finite Element Formulation for Convection Dominated Flows", Ph. D., Thesis, California Institute for Technology, 1981.

12.- Burnett, d., "Finite Element Analysis from Concepts to Applications", Addison – Wesley Publishing Co., 1987.

13.- Bykat. "Automatic Generation of Triangular Grid: I. Subdivision of General Polygon Convex Subregions. II. Triangulation of Convex Polygons". Int. J. Num: Meth. Eng., 10:1329 – 1342 (1976).

14.- Carey, S., Kabaila, A., Utku, M., "On Penalty Methods for Inter - Element Constraints". Computer Methods in Applied Mech. and Eng. 30 (1982), 151 – 171.

15.- Carey, G., Oden, J., "Finite Elements. Vol VI: Fluid Mechanics". Prentice Hall, 1986.

16.- Cavendish, J. C., "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Methods", Int. J. Num. Meth. Eng. 8:679-697 (1974).

17.- Chandrupatla, T., Belegundu, A., "Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería". Prentice may, Addison Wesley Longman. 1999.

18.- Christie, I., Griffiths, D, Mitchell, A., Zienkiewics, O., "Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives", Int. J. Num.. Meth. Eng., 10,389-396 (1977).

19.- Crochet, M., Davies, A., Walters, K., "Numerical Simulation of Non – Newtonian Flow", Rheology Series No. 1, Elsevier Publishers, 1984.

20.- Crochet, M. J., Delvaux, V., Marchal, J. M., "On the Convergence of the Streamline – Upwind Mixed Finite Element".J. of Non – Newt. Fluid Mech., 34 (1990) 261-268.

21.- Da Fonseca, Z., "El Método de los Elementos Finitos Aplicado al Flujo de Fluidos Poliméricos. Parte I: Fluidos Viscosos." Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad del Zulia. 1992.

22.- Da Fonseca, Z., "Simulación Numérica del Flujo de Fluidos Poliméricos a través de Boquillas". Reporte Interno, INDESCA, 1989.

23.- Da Fonseca, Z., Torres, A., "ANSIPOL: Un Programa para el Análisis y Simulación del Procesamiento de Polímeros", SLAP´ 90, págs. 559-563, Guadalajara, México.

24.- Da Fonseca, Z., Torres, A., Reyes, M., "Fluidos Vicoelásticos. Parte I: Revisión Bibliográfica e Implantación en ANSIPOL. Reporte Interno, INDESCA, 1990.

25.- Da Fonseca, Z., Torres, A., "Aplicación del Método de Elementos Finitos a las Ecuaciones de Stokes Mediante el Modelo Penalty", VI Jornadas Científico – Técnicas de la Fac. de Ing. de LUZ. 1988.

26.- Da Fonseca, Z., "Análisis Estático de Estructuras: Un Programa Automático" V Jornadas Científico – Técnicas de la Fac. de Ing. de LUZ, 1985.

27.- Da Fonseca, Z., Ortega, M., Vargas, L., "El Método de Elementos Finitos y su Aplicación a un Campo de Problemas". VI Jornadas Científico – Técnicas de la Fac. de Ing. de LUZ, 1988.

28.- Da Fonseca, Z., Torres, A., Bellini, F., "Simulación de Flujo de Fluidos Viscosos a través de una Boquilla Plana". SLAP´ 88, Vol. II, págs. 1390-1405, Porlamar, Venezuela.

29.- Da Fonseca, Z., Torres, A., "Aplicación del Método de Galerkin a las Ecuaciones de Stokes. Parte I: Caso Plano". Reporte Interno, INDESCA, 1990.

30.- Da Fonseca, Z., Torres, A., "Aplicación del Método de Galerkin a las Ecuaciones de Stokes. Parte II: Caso Axisimétrico". Reporte Interno, INDESCA, 1990.

31.- Da Fonseca, Z., Torres, A., Reyes, M., "El Método de Elementos Finitos Aplicado al Flujo Bidimensional de Polímeros Fundidos". VII Jornadas Científico – Técnicas, Fac. de Ing. de LUZ. 1990.

32.- Darby, R., "Viscoelastic Fluids, An Introduction to their Properties and Behavior", Marcel Dekker, INC., 1976.

33.- Finite Element Handbook. Hayrettin Kardestuncer. Edit. Mc. Graw-Hill, 1987.

34.- Fox, R., Mc. Donald, A., "Introducción a la Mecánica de los Fluidos" Edit. Interamericana, 1983.

35.- Fung, Y, C., "A First Course in Continuum Mechanics", Prentice-Hall, Inc., 1969.

36.- Gallagher, R, H., Norrie, D. H., Oden, J, T., Zienkiewicz, O. C., "Finite Element in Fluid", Vol. 4, John-Wiley & Sons (1982).

37.- Gresho, P. M., Lee, R. L., "Don't Suppress the Wiggles-they're Telling you Something"., Comp. Fluids, Vol. 9, 223-253, (1979).

38.- Guy Payre, "A, Upwind Finite Element Method via Numerical Integration", Int. J. Num. Meth. in Eng. Vol. 18, 381-396 (1982).

39.- Hang, D. Ch., "Rheology in Polymer Processing", Academic Express, 1976.

40.- Heinrich, J. C., Zienkiewcz, O. "Quagratic Finite Element Schemes for Two – Dimensional Convective – Transport Problems", Int. J. for Num. Met. in Eng. Vol. 11, 1831-1844 (1977).

41.- Huang, D., White, J, L., "Extrudate Swell from Slit and Capillary Dies: An Experimental and Theorical Study", Polym. Eng. & Sci. 1979, Vol. 19, No. 9. pp. 609-616.

42.- Huebner, K., "The Finite Element Method for Engineers", John Wiley & Sons, 1975.

43.- Hughes, T. J. R., "A Simple Scheme for Devoloping Upwind Finite Element", J. Num. Meth. Eng., 12. 1359-1365, (1978).

44.- Hughes, T. J. R., Liu, W., Brooks, A., "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Formulation", J. Comp. Physics, 30, 1-60 (1979).

45.- Hughes, T. J. R., Brooks, A., "A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion", AMD Vol. 34. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, T. J. R. Hughes (Ed) ASME, N.Y. 1979.

46.- Huyakorn, P. S., “Solution of Steady – State Convective Transport Equation Using an Upwind Finite Element Scheme”, Appl. Math. Modelling, 1977, Vol. 1, pp. 187-195.

47.- Joseph, D. D., Renardy, M., Sant, J. C., Arch. Ration Mech. Anal. 87 (1985). P. 213.

48.- Mitsoulis, E., “Finite Element Analysis of Two – Dimensional Melt Flows”, Ph. D. Thesis, Mc Master University, 1984.

49.- Mitsoulis, E., Vlachopoulos, J., Mirza, F., “Numerical Simulation of Entry and Exit Flows in Slit Dies”, Polym. Eng. Sci. Vol. 24, No. 29, June 1984, pp. 707-715.

50.-Mitsoulis, E., Vlachopoulos, J., Mirza, F., “Finite Element Analusis of Two – Dimensional Melt Flows”.Polym. Proc. Eng. Vol. 1, No. 3, 1983, pp. 263-308.

51.- Mitsoulis, E., Vlachopoulos, J., Mirza, F., “Simulation of Extrudate Swell from Long Slit and Capillary Dies”, Polym. Proc. Eng. Vol. 2, No. 2 13, 1984, pp. 153-177.

52.- Mitsoulis, E., Vlachopoulos, J., “The Finite Element Method for Flow and Heat Transfer Analysis”, Advances in Polymer Technology. 1984. pp. 107-121.

53.- Mitsoulis, E., “Streamline – Upwind / Petrov – Galerkin Finte Element Methods in Polymer Proccessing”. Chem. Eng. Technol. 12 (1989) 269-273.

54.- Nadai, A., “Theory of Flow and Fracture of Solids”, Vol. II, Mc Graw-Hill, New York, 1963.

55.- Nickell, R., Tanner, R., Caswell, B., “The Solution of Viscous Incompressible Jet and Free Surface Flows Using Finite Element Methods”, J. Fluids Mech. 65, 189-206.

56.-. Oden J. T. “Finite Elements of Nonlinear Continua”. McGraw-Hill. 1972

57.-. Patankar, S. V., “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”. Hemisphere Publishing. 1980.

58.- Paton, J. B., Squieres, P. H., Darnell, W. H., Cash, F. M., Carley, J. F., “Extrusion Processing of Thermoplastic Materials”. Pp. 154-302. Editado por Bernhard E. C. Y Robert Krieger. Publishing Co.

59.-. Przemieniecki, J. S., “Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill. 1968

60.-. Rao,S., “The Finite Element Method in Engineering”. Pergamon Press. 1989.

61.-Reddy, J., “An Introduction to Finite Element Method”, Mc Graw-Hill, 1984.

62.- Reddy, J., “Applied Functional Analysis and Variational Method in Engineering”, Mc Graw-Hill, 1986.

63.- Reyes, M., Da Fonseca, Z., Torres A., "REDUC: Un Algoritmo para la Reducción del Semi – Ancho de Banda para ANSIPOL". Reporte Interno, INDESCA, 1989.

64.- Richardson, S, M., "Flows of Variable Viscosity Fluids in Ducts with Heated Walls", J. Non-Newt. Fluid Mech, 25 (1987), 137-156.

65.- Roylance, D., "Use of Penalty Finite Element in Analysis of Polymer Melt Processing". Polym. Eng. Sci. 1980, Vol. 20, No. 5.

66.- Runchal, A., "Convergence and Accuracy of thee Finite Difference Schemes for a Two-Dimensional Conduction and Convection Problem", Int. J. Num. Meth. Eng. 4, 545-550 (1972).

67.- Schlichting, H., "Boundary-Layer Theory", Mc Graw Hill, 1968.

68.- Schultz, W. W., Gervasio, C., "A Study of the Singularity in the Die-Swell Problem". J. Mech. Appl. Math., Vol. 43, (1990) PP. 408-425.

69.- Tanguy, P., Fortin, A., Bertrand, F., "A Finite Element Simulation of Polymer Melt Flows", Advances in Polymer Tech., Vol. 6, No. 4, 501-508. (1986)

70.- Tanguy, P., Fortin, A., Bertrand, F., "A 3-D Finite Element Model For Polymer Melt Flow", Advances in Polymer Tech, Vol. 8, No. 2, 99-113 (1988).

71.- Tanner, R., "Extrudate Swell". Comp. Anal. of Polym. Processing, pp. 63-91. Editado por J. R. Pearson y S. M. Richardson, Applied Science Publishers, 1983.

72.- Taylor C., Hood, P., "A Numerical Solution of the Navier – Stokes Equations Using the Finite Element Technique". Com. Flids, Vol. 1, pp. 73-100. Pergamon Press, 1973.

73.- Taylor C., Hood, P., "A Numerical Solution of the Navier – Stokes Equations Using the Finite Element Technique". Com. & Flids, Vol. 1, pp. 73-100. Pergamon Press, (1973).

74.-. Timoshenko, S., Goodier, J.N., "Theory of Elasticity", 3ed. McGraw-Hill, New York,1970.

75.- Torres, A., "Aplicación del Método de Elementos Finitos a las Ecuaciones de Stokes mediante el modelo Penalti". Trabajo Especial de Grado, Fac. de Ing. De LUZ, 1988.

76.- Torres, A., Reyes, M., Da Fonseca, Z., "MESH: Un Programa Interactivo para la Generación de Mallas Bi-Dimensionales de Elementos Finitos". Vii Jornadas Científico-Técnicas de la Fac. de Ing. de LUZ, 1990.

77.-. Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures". Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, pp. 805-823. 1956

78.-. Richards T. H., "Energy Methods in Stress Analysis". John Wiley & Sons. 1977

79.-. Rivlin, R. S., “Large Elastic Deformations of Isotropic Materials IV. Futher Developments of the General Theory”. Philosophical Transactions of the Royal Society of London”. Vol. 4, pp.379-397. 1948.

80.-. Robison, J., “Integrated Theory of Finite Element Meted”.John Wiley & Sons. 1973.

81.- Tzoganakis, C., Vlachopoulos, J., Hamilelec, E., “Non-Isothermal Polymer Flow fron Viscometer Reservior to Capillary Die”, Plastic and Rubber Proceeding and Applications, (1987), 155-161.

82.-. Ugural, A., Fenster, S., “Advanced Strength and Applied Elasticity”.Elsevier. 1977.

83.- Vlachopoulos, J., “Extrudate Swell in Polymer Rheology – A Review”, Proceed. 2nd World Congr. Chem. Eng., Vol. VI, 269 (1981) Montreal.

84.-. Washizu, K, “ Variational Methods in Elasticity and Plasticity”. 2ed. Pergamon Press. 1975.

85.-. Wilson, E. L.,”Structural Analysis of Axisymetric Solids”. AIAA Journal, Vol. 3, pp. 2269-2274. 1965

86.- White, F. M, “Viscous Fluid Flow”, Mc Graw-Hill, 1974.